Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Januar 2008

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 11

Präsenzübung

Ü 35 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie mit dem Startvektor $x^{(0)} = (-6, -6)^T$ jeweils drei Schritte des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens aus.

b) Erstellen Sie eine Skizze, die die beiden Gleichungen des Systems als Geraden interpretiert (die exakte Lösung lautet $x^* = (3.\overline{6}, 2.\overline{3})^T$) und ergänzen Sie die Skizze um die Iterationsfolgen

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

im Falle des Gauß-Seidel-Verfahrens und

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

im Falle des Jacobi-Verfahrens.

Ü 36 Zeigen Sie: Jede Matrix mit nicht verschwindenden Einträgen auf den ersten Nebendiagonalen ist irreduzibel. (Insbesondere ist jede Tridiagonalmatrix mit dieser Gestalt irreduzibel.)

Ü 37 Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ eignet sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & b & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

zur Durchführung des SOR-Verfahrens mit

a) $0 < \omega \leq 1$?

b) $0 < \omega < 2$?

c) $0 < \omega \leq \omega_0, \omega_0 > 1$? (ω_0 nicht bekannt)

Ü 38 Finden Sie eine symmetrisch positiv definite Matrix A, für die das Jacobi-Verfahren nicht konvergiert.
Hinweis: Betrachten Sie Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Hausübung

H 35 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Welches der beiden zu folgenden Zerlegungen gehörenden Iterationsverfahren konvergiert für alle $x_0 \in \mathbb{R}^3$ gegen die Lösung x^* von $Ax^* = b,\ b \in \mathbb{R}^3$?

a) $G \;=\; D^{-1}(L+U)$ (Gesamtschrittverfahren)

b) $G \;=\; (D-L)^{-1}U$ (Einzelschrittverfahren)

H 36 Bei der Diskretisierung einer 2-Punkt Randwertaufgabe einer gewöhnlichen DGL 2. Ordnung ist ein lineares Gleichungssystem entstanden. Die Matrix hat die Dimension $N \times N$, ist tridiagonal und hat folgende Struktur:

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+h^2c & -1+\frac{h}{2}r & & & \\ -1-\frac{h}{2}r & 2+h^2c & -1+\frac{h}{2}r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1-\frac{h}{2}r & 2+h^2c & -1+\frac{h}{2}r \\ & & & -1-\frac{h}{2}r & 2+h^2c \end{pmatrix}.$$

Dabei seien $r \in \mathbb{R}$ und $0 \le c \in \mathbb{R}$ fest aber beliebig. Welche Bedingungen muß man an die Schrittweite h stellen, damit die Matrix eine irreduzibel-diagonaldominate L-Matrix, also eine M-Matrix ist. Für die Schrittweite h gilt übrigens die Relation $h = \frac{1}{N}$ (je kleiner h desto größer die Matrix).

H 37 (*Eigenschaften von Matrizen*)

Untersuchen Sie die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 10 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & 4-a & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

auf die Eigenschaften Irreduzibilität, strikte und irreduzible Diagonaldominanz, L- und M-Matrix.

H 38 Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_i &= 3x_{i+1} + b_i, \quad i = 1,\ldots,n-1, \\ x_n &= b_n. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß das Einzelschritt-Verfahren für alle Startwerte konvergiert.

b) Berechnen Sie mit $b = (0,\ldots,0,-3,1)^T$, $n = 100$ und $x^{(0)} = (0,\ldots,0)^\top$ den Fehler $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty$ für alle Iterierten $k \in \mathbb{N}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.