Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

18. Dezember 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 10

Präsenzübung

Ü 31 Man gebe $\vec{u}$ an, so daß

$$Q = I - \frac{2}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u}\vec{u}^T$$

den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

auf ein Vielfaches des ersten Koordinateneinheitsvektors transformiert. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis.

Ü 32 Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist R aus einer QR–Zerlegung der Matrix A entstanden?

Ü 33 Um den Kehrwert einer Zahl $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ zu bestimmen, ohne eine Division durchzuführen, verwenden einige Computer ein Schema, das auf dem Newton–Verfahren basiert. Hierzu sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x} - a$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift des Newton–Verfahrens so, daß keine Division Verwendung findet.

b) Berechnen Sie für $a = 0.75$ und den Startwert $x^{(0)} = 1.5$ zwei Schritte der Newton–Iteration.

c) Veranschaulichen Sie das Resultat an einer Skizze.

Ü 34 Das nichtlineare Gleichungssystem $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ mit

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 e^{(1-x_2)} \\ 5x_1 - 5x_2 + 4 \end{pmatrix},$$

soll näherungsweise mit dem Newton–Verfahren gelöst werden. Bestimmen Sie $\vec{x}^{(1)}$ für den Startwert $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hausübung

H 31 Gegeben seien die Meßdaten:

i	0	1	2
x_i	0	3	4
y_i	2	1	3
z_i	3	1	8

Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate und unter Verwendung der QR–Zerlegung t_1 und t_2 so, daß $t_1 x + t_2 y$ die Meßdaten z am besten wiedergibt und berechnen Sie die 2-Norm des Residuums.

Hinweis: Ein Householdermatrix–Vektor–Produkt der Form $U\vec{x}$ wird stets berechnet wie folgt:

$$\left(I - \frac{2}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u}\vec{u}^T\right)\vec{x} = \vec{x} - \frac{2\vec{u}^T\vec{x}}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u}.$$

Benutzen Sie dies für die Spalten von Φ und die Inhomogenität.

H 32 Man beweise unter Verwendung des vereinfachten Newton-Verfahrens

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - A\vec{F}(\vec{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit $A := (\mathcal{J}_{\vec{F}}(0,0))^{-1}$ und durch Anwendung von Satz 5.3.1, daß die Funktion

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x + 2y + \frac{1}{3}(x^2+y^2)x + 0.2 \\ 2x + 4y + \frac{1}{3}(x^2+y^2)y - 0.2 \end{pmatrix}$$

im Quadrat $-0.4 \le x, y \le 0.4$ genau eine Nullstelle besitzt. Ein geeigneter Startwert ist $\vec{x}^{(0)} = (0,0)^T$.

H 33 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^3 - x$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-2, 2]$.

b) Führen Sie vier Schritte des Newton–Verfahrens durch, beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = 2$. Tragen Sie die einzelnen Schritte in die Skizze ein.

c) Ist der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ geeignet, um die Nullstelle $x_N = 0$ mit dem Newton-Verfahren zu finden?

d) Bestimmen Sie einen Startwert $x_0 \neq 0$ so, daß für den Wert nach dem ersten Schritt des Newton–Verfahrens $x_1 = -x_0$ gilt. Wie lauten die weiteren Folgenglieder?

e) Welche Startpunkte sind ungeeignet, um eine Nullstelle zu finden?

H 34 Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 + \cos x_1 \\ \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach, dass das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^2$ besitzt.
Hinweis: Verwenden Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm und zeigen Sie, dass $L = \frac{4}{5}$ eine geeignete Wahl ist.

b) Geben Sie eine Schranke für die Anzahl der Iterationen an, die man höchstens benötigt, um die Lösung $\vec{x}^*$ mit der Iterationsvorschrift $\vec{x}^{(k+1)} = \Phi(\vec{x}^{(k)})$ ausgehend von $\vec{x}^{(0)} = (0,0)^T$ bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 10^{-3}$ zu berechnen.