Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

16. Oktober 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 1

Präsenzübung

Ü 1 Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ zu den Stützstellen $x_0,\ x_1, \dots,\ x_n$ mit den Stützwerten $y_i := x_i^2 - 3x_i + 2,\ i = 0, 1, \dots, n$ für folgende Fälle:

a) $n = 1,\ x_0 = 1,\ x_1 = 2,$

b) $n = 1,\ x_0 = 0,\ x_1 = 2,$ (Verwenden Sie die Lagrange–Darstellung)

c) $n = 2,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,$

d) $n = 3,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

Ü 2 Dividierte Differenzen.
Es wird behauptet, das folgende Schema dividierter Differenzen stamme von einer Funktion, deren sämtliche Ableitungen betragsmässig kleinergleich 1.5 seien. Ist dies plausibel?

i	x_i	$y_i = f_{[x_i]}$	$f_{[x_i,x_{i+1}]}$	$f_{[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]}$	$f_{[x_i,\dots,x_{i+3}]}$	$f_{[x_i,\dots,x_{i+4}]}$
0	0	0	0.9636	-0.7058	0.1094	0.0461
1	1	0.9636	-0.4481	-0.3776	0.2938	
2	2	0.5155	-1.2033	0.5038		
3	3	-0.6878	-0.1957			
4	4	-0.8835				

Ü 3 Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ soll mit Hilfe des Newton'schen Interpolationspolynoms vom Grad 2 ($p_2(x)$) zwischen den Stützstellen $x_0 = 1, x_1 = 2.25$ und $x_2 = 4$ interpoliert werden. Vergleichen Sie den exakten Interpolationsfehler im Punkt $x = 2$ mit der Fehlerabschätzung aus Satz 1.1.5.

Hausübung

H 1 **Newton-Interpolation** (2 Punkte)
Die Funktion $f(x) = \sin((\pi/2)x)$ soll im Intervall $[0, 1]$ zwischen den Stützstellen

i	0	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
f_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

interpoliert werden.

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_3(x)$ aus diesen Daten nach der Newtonschen Darstellung und unter Verwendung des Schemas der dividierten Differenzen.

b) Vergleichen Sie den exakten Fehler $|\sin(\frac{\pi}{4}) - p_3(\frac{1}{2})|$ mit der Fehlerabschätzung für Interpolationspolynome.

H 2 (LAGRANGE-*Polynome*)
Zu den $n + 1$ Interpolationsstützstellen $x_0, \ldots, x_n$, paarweise verschieden, seien die LAGRANGEschen Interpolationspolynome $L_{i,n}(x_j) = \delta_{ij}$ gegeben. Bestimmen Sie $k \in \mathbb{N}$ so, daß $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_{i,n}(x) = x^k.$$

H 3 *numerische Differentiation mittels Interpolation*
Um die erste Ableitung einer Funktion f in einem Punkt x nur mittels Funktionsauswertungen zu approximieren, kann man mit Hilfe der Interpolation geeignete Formeln, sogenannte Differenzenquotienten, herleiten.

Gegeben sei eine äquidistante Funktionstabelle $x_i = x_0 + ih$, $\quad f(x_i)$ für festes $h > 0$ und $i = 0, 1, 2, \ldots$. Hieraus möchte man eine Tabelle von Näherungen der ersten Ableitung erstellen, indem man ein Interpolationspolynom niedrigen Grades für benachbarte Punkte aufstellt und dieses differenziert. Hierzu hat man verschiedene Möglichkeiten die Gitterpunkte relativ zum Auswertungspunkt anzuordnen. Für manche Anwendungen benötigt man die Ableitung am jeweiligen (Teil)gitterende und dies soll hier untersucht werden.

Um also die Ableitung von f im Punkt x_{i-1} zu approximieren, interpoliere man f in den Stützstellen x_{i-1}, x_i, x_{i+1} und bestimme die Ableitung des Interpolationspolynoms in x_{i-1}. Welche Formel ergibt sich und wie hängt der Fehler der Approximation von h ab ?

Hinweis: Es gilt folgende allgemeine Fehlerabschätzung für die erste Ableitung eines Interpolationspolynoms vom Grad n zu $x_0, \ldots, x_n$

$$f'(x) - p_n'(x) = \frac{f^{(n+2)}(\bar{\xi}(x))}{(n+2)!} \prod_{j=0}^{n}(x - x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\tilde{\xi}(x))}{(n+1)!} \frac{d}{dx} \left(\prod_{j=0}^{n}(x - x_j) \right),$$

wobei $\bar{\xi}$ und $\tilde{\xi}$ aus dem Intervall $[a, b]$ sind.