TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

WS 2008/09
29.10.08

3. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Probability Theory“

1. a) Geben Sie einen Inhalt an, der von oben, aber nicht von unten σ-stetig ist.

b) Geben Sie einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ und $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \neq 0$ an.

2. Let the probability space $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ be *nonatomic*, i.e., $P(A) > 0, A \in \mathcal{A}$, implies that there exists a $B \in \mathcal{A}$ such that $B \subset A$ and $0 < P(B) < P(A)$.

a) Show that $P(A) > 0, A \in \mathcal{A}$, and $\varepsilon > 0$ imply that there exists a $B \in \mathcal{A}$ such that $B \subset A$ and $0 < P(B) < \varepsilon$.

b) Show that there exists an $A \in \mathcal{A}$ such that $P(A) = \frac{1}{2}$ (In fact, for each $x \in [0,1]$ there exists an $A \in \mathcal{A}$ such that $P(A) = x$).
Hint: Inductively define classes $\mathcal{H}_n$, numbers h_n and sets $H_n \in \mathcal{H}_n$ by $\mathcal{H}_0 = \{\emptyset\} = \{H_0\}, \mathcal{H}_n = \{H \in \mathcal{A} : H \subset (\bigcup_{k<n} H_k)^c, P(\bigcup_{k<n} H_k) + P(H) \leq \frac{1}{2}\}, h_n = \sup\{P(H) : H \in \mathcal{H}_n\}$, and $P(H_n) > h_n - \frac{1}{n}$. Consider $\bigcup_{k\geq 1} H_k$.

c) Show for nonatomic measures P_1 and P_2 on $(\Omega, \mathcal{A})$ that there exists an $A \in \mathcal{A}$ such that $P_1(A) \geq \frac{1}{2}$ and $P_2(A^c) \geq \frac{1}{2}$ (The proof should show how to divide a piece of cake 'fairly' between two children).

3. Sei μ ein endliches Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ in Ω sowie $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ eine Algebra mit $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$.
Zeigen Sie: Zu jedem $A \in \mathcal{A}$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $A_0 \in \mathcal{A}_0$ mit $\mu(A \triangle A_0) < \varepsilon$.
Hinweis: μ ist die eindeutige Fortsetzung von $\mu_{|\mathcal{A}_0}$ auf $\mathcal{A}$.

4. a) Consider a probability measure P on $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ and define $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ by $F(x) = P(]-\infty, x])$. Show that

(i) F is non-decreasing,

(ii) F is right continuous,

(iii) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$,

(iv) F is continuous at $x \in \mathbb{R}$ iff $P(\{x\}) = 0$.

b) Consider a function $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ that satisfies (i)–(iii). Sketch the proof of the following fact: There exists a uniquely determined probability measure P on $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ such that $F(x) = P(]-\infty, x])$ for every $x \in \mathbb{R}$. Provide the details of some steps in the proof.