TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

WS 2008/09
22.10.08

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Probability Theory“

1. a) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\{f = x\} \in \mathcal{A} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

im allgemeinen nicht hinreichend ist für $f \in \mathcal{Z}(\Omega, \mathcal{A})$.

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum mit $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie die Existenz einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $|f| \in \mathcal{Z}(\Omega, \mathcal{A})$ und $f \notin \mathcal{Z}(\Omega, \mathcal{A})$.

c) Prove or disprove: If $f \in \mathcal{Z}(\Omega, \mathcal{A})$ and $A \in \mathcal{A}$ then $f(A) \in \mathcal{B}$.

2. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{Z}(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie

$$\{\omega \in \Omega : \{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\} \text{ liegt dicht in } \mathbb{R}\} \in \mathcal{A}.$$

3. a) Consider the product space $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B})$. Show that $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}$ contains the set of bounded sequences, the set of monotone sequences, and the set of convergent sequences. Is any of these sets a cylinder set?

b) Let $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I \neq \emptyset$, be measurable spaces. Prove that the corresponding system $\mathcal{R}$ of measurable rectangles is a semi-algebra in Ω. Show that $\mathcal{R}$ is not an algebra, in general.

4. Let $T > 0$ and consider the product space $(\mathbb{R}^{[0,T]}, \bigotimes_{t\in[0,T]} \mathcal{B})$. Let C denote the set of real-valued continuous functions on $[0,T]$. Show that $A \in \bigotimes_{t\in[0,T]} \mathcal{B}$ and $A \subset C$ implies that $A = \emptyset$. Thus, in particular $C \notin \bigotimes_{t\in[0,T]} \mathcal{B}$. Show, on the other hand, that $A \in \bigotimes_{t\in[0,T]} \mathcal{B}$ and $C \subset A$ do not imply that $A = \mathbb{R}^{[0,T]}$.