

**13. Aufgabenblatt zur Vorlesung
 „Probability Theory“**

1. A point is picked uniformly at random at the surface of the unit sphere. With θ and ϕ denoting the longitude and latitude, respectively, determine the regular conditional distribution of θ given ϕ and ϕ given θ , respectively.

2. Betrachten Sie $(\Omega, \mathfrak{A}, P) = ([0, 1], \mathfrak{B}([0, 1]), \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Für $\omega \in [0, 1]$ sei

$$X(\omega) = 2\omega^2, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & \text{falls } \omega < 1/2, \\ 2\omega - 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $E(X | Y)$ und $E(X | Y = y)$ für $y \in [0, 1]$.

3. a) Betrachten Sie unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen X und Y auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum mit $E(|X|) < \infty$. Bestimmen Sie $E(X | X + Y)$.

b) Betrachten Sie eine Folge X_1, X_2, \dots von iid. Zufallsvariablen. Bestimmen Sie

$$E(X_1 | \sigma(\{S_n, S_{n+1}, \dots\})),$$

wobei $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

4.) Sei (X, Y) normalverteilt mit Lebesgue-Dichte

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{\det \Sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (z - m)' \Sigma^{-1} (z - m)\right),$$

wobei $\sigma_X, \sigma_Y > 0$ und

$$m = \begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ positiv definit.}$$

Setze

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

a) Zeigen Sie

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1 - \rho^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \cdot h(z)\right)$$

mit

$$h(z) = \frac{(x - m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y - m_Y)^2}{\sigma_Y^2} - 2\rho \cdot \frac{(x - m_X)(y - m_Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

für $z = (x, y)'$.

- b) Berechnen Sie die Dichte f_Y der Verteilung von Y . Interpretieren Sie die Parameter m_X , m_Y , σ_X^2 und σ_Y^2 .
- c) Zeigen Sie, daß ρ der Korrelationskoeffizient von X und Y ist.
- d) Berechnen Sie $E(X | Y = y)$.

Hinweis: Einige Rechnungen gestalten sich einfacher, wenn man zunächst den Fall $m = 0$ und $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ behandelt.