TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

WS 2008/09
21.01.09

12. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Probability Theory“

1. Zeigen Sie, daß jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n)$ durch seine Werte auf allen Halbräumen, d.h. auf den Mengen der Form $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a\rangle \leq c\}$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$, eindeutig bestimmt ist.

Hinweis: charakteristische Funktionen. Wie lautet die Aussage im Fall $n = 1$?.

2. Construct an independent sequence of random variables X_n such that

(i) $X_n \in \mathfrak{L}^2$ and $E(X_n) = 0$ for every $n \in \mathbb{N}$,

(ii) the distributions $P_{S_n^*}$ converge weakly to $N(0,1)$, where $S_n^* = \sum_{i=1}^n X_i / \left(\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)\right)^{1/2}$, and

(iii) the random variables $X_{nk} = X_k / \left(\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)\right)^{1/2}$ are not asymptotically negligible.

3. Die Zufallsgrößen X und Y seien unabhängig und identisch verteilt mit $0 < \mathrm{Var}(X) < \infty$. Weiter sei $Z = (X+Y)/a$ mit $a > 0$. Zeigen Sie: Ist $P_Z = P_X$ so folgt notwendig

(i) $a = \sqrt{2}$,

(ii) $\left(\varphi_X(x/2^n)\right)^{2^{2n}} = \varphi_X(x) \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $X \sim N(0, \mathrm{Var}(X))$.

4. Gegeben sei eine Folge von Zufallsgrößen $Y_n \sim \pi(\lambda_n),\ n \in \mathbb{N}$, mit $\lambda_n \to \infty$. Zeigen Sie, dass die Folge der Verteilungen von $(Y_n - \lambda_n)/\lambda_n^{1/2}$ schwach gegen $N(0,1)$ konvergiert.