TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

WS 2008/09
14.01.09

11. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Probability Theory“

1. Betrachten Sie das Cramér-Lundberg-Modell mit Zeithorizont $T > 0$.

a) Entwickeln und implementieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß der Gesamtschaden zur Zeit T eine Schranke $s > 0$ übersteigt.

b) Entwickeln und implementieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit.

c) Ergänzen Sie Ihren Algorithmus um die Berechnung asymptotischer Konfidenzintervalle für die o.g. Wahrscheinlichkeiten.

2. Consider an independent sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of random variables with

$$P(\{X_n = 0\}) = 1 - \frac{1}{n\log(n+1)}, \qquad P(\{X_n = \pm n\}) = \frac{1}{2n\log(n+1)}.$$

Show that $(X_1 + \ldots + X_n)/n$ does not converge almost surely.

Hint: Consider the event $\limsup_{n\to\infty}\{|X_n| = n\}$.

3. Zeigen Sie folgende Aussagen mit Hilfe charakteristischer Funktionen.

a) Die Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen ist normalverteilt.

b) Für Zufallsvariablen $X_n,\ X,\ Y_n,\ Y$ mit Unabhängigkeit von (X_n, Y_n) für jedes n und von (X, Y) gilt

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X \quad \wedge \quad Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y \quad \Rightarrow \quad X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X + Y.$$

Vgl. Aufgabe 9.2.

4. Let $\mu_n = B(n, p_n)$ denote a binomial distribution with parameters $n \in \mathbb{N}$ and $p_n \in\ ]0, 1[$. Assume that

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda > 0.$$

Use Fourier transforms to show that

$$\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \pi(\lambda),$$

where $\pi(\lambda)$ denotes a Poisson distribution with parameter λ.