TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

WS 2008/09
15.10.08

# 1. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Probability Theory“

**1.** Geben Sie für die folgenden Beispiele $\alpha(\mathcal{E})$, $\sigma(\mathcal{E})$ und $\delta(\mathcal{E})$ an.

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$

$\Omega = \mathbb{Q}$, $\mathcal{E} = \{\{x\} : x \in \mathbb{Q}\}$

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \{[0, \infty)\}$

$\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{E} = \{\{2, 4, \ldots, 2n\} : n \in \mathbb{N}\}$

$\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{E} = \{\{n, n+1\} : n \in \mathbb{N}\}$

$\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{E} = \{A \subset [0, 1] : A \text{ ist endlich}\}$.

**2.** Sei $\Omega$ eine nichtleere Menge.

**a)** Der Schnitt zweier $\sigma$-Algebren in $\Omega$ ist wieder eine $\sigma$-Algebra in $\Omega$. Gilt dies auch für die Vereinigung?

**b)** Zeigen Sie, dass für $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ im allgemeinen keine kleinste Semialgebra in $\Omega$ existiert, die $\mathcal{E}$ enthält.

**3.** Show that a $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ cannot be countably infinite – its cardinality must be either finite or at least that of the continuum. Proceed in the following way:

a) Assume that $\mathcal{A}$ is infinite and choose a sequence $A_1, A_2, \ldots$ of pairwise distinct sets in $\mathcal{A}$. Consider
$$\mathcal{G} = \{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^* : A_n^* \in \{A_n, A_n^c\}\}.$$
Show that $\mathcal{G}$ is infinite and consists of pairwise disjoint sets.

b) Choose a sequence $G_1, G_2, \ldots$ in $\mathcal{G}$, put
$$\mathcal{G}^* = \{\bigcup_{G \in \mathcal{M}} G : \mathcal{M} \subset \{G_1, G_2, \ldots\}\},$$
and construct an injection $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{G}^*$.

**4.** Consider a mapping $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ between metric spaces $(\Omega_i, d_i)$. Show that $D \in \mathfrak{B}(\Omega_1)$ for the set $D$ of discontinuity points of $f$.