Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

15. November, 2007

1. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik I
WS 2007/2008

(H1.1) [Relationen]

(i) Welche der Eigenschaften „Reflexivität", „Symmetrie" und „Transitivität" haben die folgenden binären Relationen

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,2),(5,6),(2,3),(1,3),(4,4)\} \text{ auf } A_1 = \{1,2,3,4,5,6\}, \\ R_2 &= \{(1,1),(2,2),(3,3)\} \text{ auf } A_2 = \{1,2,3\}, \\ R_3 &= \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\} \text{ auf } A_2 = \{1,2\}? \end{aligned}$$

(ii) Sei $p : Y \to X$ eine Surjektion. Zeigen Sie, dass durch

$$y_0 \sim y_1 :\Leftrightarrow p(y_0) = p(y_1)$$

eine Äquivalenzrelation auf Y definiert wird. Zeigen Sie auch, dass es eine Bijektion zwischen $Y/\sim$ und X gibt.

(H1.2) [Boolesche Algebren]

Sei $(B, 0, 1, +, \cdot, ')$ eine Boolesche Algebra.

(i) Seien $x, y \in B$ so, dass

$$x \cdot y = 0 \text{ und } x + y = 1.$$

Zeigen Sie, dass $y = x'$. (Verwenden Sie hier und in (ii) nur die Axiome und Regeln die Sie in Aufgabe (E2.3) abgeleitet haben.)

Hinweis: beweisen Sie $y = x'y$ und $x' = x'y$.

(ii) Zeigen Sie die De Morgan Regeln:

$$\begin{aligned} 0' &= 1, \\ 1' &= 0, \\ (x+y)' &= x' \cdot y', \\ (x \cdot y)' &= x' + y', \\ x'' &= x. \end{aligned}$$

(iii) Zeigen Sie, dass durch $\varphi(b) = b'$ ein Isomorphismus von Booleschen Algebren

$$(B, 0, 1, +, \cdot, ') \xrightarrow{\varphi} (B, 1, 0, \cdot, +, ')$$

definiert wird.

(H1.3) [Wahrheitswertetafeln]

Zeigen Sie anhand von Wahrheitswertetafeln, dass die folgenden aussagenlogischen Formeln äquivalent sind:

$$\begin{array}{rcl}
\neg(p \vee q) & \text{und} & \neg p \wedge \neg q, \\
\neg(p \wedge q) & \text{und} & \neg p \vee \neg q, \\
\neg(p \to q) & \text{und} & p \wedge \neg q, \\
p \wedge \neg q & \text{und} & (p \vee q) \wedge \neg q, \\
p & \text{und} & \neg p \to p.
\end{array}$$

(H1.4) [Induktion]

(i) Beweisen Sie durch Induktion:

Es gibt kein Wort $w \in \{a, b\}^*$ mit $aw = wb$.

(ii) Geben Sie einen Ein-Zeilen-Beweis für (i), die keine Induktion verwendet.

(iii) Beweisen Sie durch Wertverlaufsinduktion:

Jede natürliche Zahl $n \geqslant 8$ kann als Summe eines Vielfachen von 3 und eines Vielfachen von 5 ausgedrückt werden.

(iv) Die Menge der arithmetischen Ausdrücke sei wie folgt induktiv erklärt:

(a) jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist ein Ausdruck,

(b) mit s und t sind auch $s \cdot t$ und $s + t$ Ausdrücke,

(c) mit s ist auch (s) ein Ausdruck.

Zeigen Sie durch strukturelle Induktion, dass jeder Ausdruck die gleiche Anzahl von linken und rechten Klammern enthält.