

## 2. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I WS 2007/2008

### (E2.1) [Funktionen]

Wir definieren die Funktion  $P : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  durch

$$P(x, y) = \max(x^2, y^2) + x + \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq y, \\ x - y & \text{falls } y < x. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $P$  eine Bijektion ist.

Hinweis: Berechnen Sie die Einträge in der folgenden Tabelle.

$P(x, y)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$y = 0$			
$y = 1$			
$y = 2$			

### (E2.2) [Äquivalenzrelationen]

Seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  Funktionen. Wir sagen „ $f$  ist in  $\mathcal{O}(g)$ “ (kurz „ $f \in \mathcal{O}(g)$ “), falls es Konstanten  $K, n_0$  gibt, so dass

$$f(n) \leq K \cdot g(n) \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Wir schreiben  $f \sim g$ , falls  $f \in \mathcal{O}(g)$  und  $g \in \mathcal{O}(f)$ .  $f \sim g$  besagt, dass  $f$  und  $g$  dieselbe Wachstumsrate haben.

Zeigen Sie, dass  $f \sim g$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist.

### (E2.3) [Boolesche Algebren]

Sei  $(B, 0, 1, +, \cdot, ')$  eine Boolesche Algebra. Zeigen Sie die folgende Regeln, wobei Sie nur die folgende Axiome verwenden:

**BA1:**  $+$  und  $\cdot$  sind assoziativ und kommutativ, d.h. für alle  $x, y, z \in B$ :

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= x + (y + z), & x + y &= y + x, \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z), & x \cdot y &= y \cdot x. \end{aligned}$$

**BA2:**  $+$  und  $\cdot$  sind distributiv, d.h. für alle  $x, y, z \in B$ :

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z).$$

**BA3:** 0 und 1 sind neutrale Elemente bzgl.  $+$  und  $\cdot$ :

$$x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x \text{ für alle } x \in B.$$

**BA4:** Komplement:  $0 \neq 1$  und  $x \cdot x' = 0$  und  $x + x' = 1$  für alle  $x \in B$ .

- (i)  $0 \cdot 0 = 0$ ,
- (ii)  $1 + 1 = 1$ ,
- (iii)  $x + x = x$ ,
- (iv)  $x \cdot x = x$ ,
- (v)  $x \cdot 0 = 0$ ,
- (vi)  $x + 1 = 1$ ,
- (vii)  $x + (x \cdot y) = x$ ,
- (viii)  $x \cdot (x + y) = x$ .

#### (E2.4) [Boolesche Algebren]

Seien  $(B, 0, 1, +, \cdot, ')$  und  $(\overline{B}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{+}, \overline{\cdot}, \overline{'})$  zwei Boolesche Algebren, und sei  $f : B \rightarrow \overline{B}$  eine Funktion.

Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i)  $f$  ist ein Homomorphismus.
- (ii)  $f(x') = f(x)\overline{'}$  und  $f(x + y) = f(x)\overline{+}f(y)$  für alle  $x, y \in B$ .

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass in jeder Booleschen Algebra gilt:

$$x \cdot y = (x' + y')'.$$