

**ANALYSIS III, FUNKTIONENTHEORIE
TU DARMSTADT, 2-STÜNDIG, WS 2007/08**

KARSTEN GROSSE-BRAUCKMANN

INHALTSVERZEICHNIS

Literatur	iii
Einführung	iv
1. Holomorphe Funktionen	1
1.1. Komplexe Zahlen und die Geometrie der komplexen Multiplikation	1
1.2. Holomorphe Funktionen	3
1.3. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen	4
1.4. Potenzreihen	5
2. Kurvenintegrale: Reelle Theorie	8
2.1. Potentialfunktionen	8
2.2. Kurvenintegrale	9
2.3. Gebiete	11
2.4. Existenz von Potentialen und Kurvenintegrale	12
2.5. Einfach zusammenhängende Gebiete	14
2.6. Die Symmetrie von J_X als Integrabilitätsbedingung	15
2.7. Ausblick: Pfaffsche Formen	19
3. Integralformeln für holomorphe Funktionen	21
3.1. Komplexe Kurvenintegrale	21
3.2. Cauchyscher Integralsatz	23
3.3. Cauchysche Integralformeln	25
4. Eigenschaften holomorpher Funktionen	28
4.1. Holomorphe Funktionen sind glatt	28

4.2.	Holomorphe Funktionen sind analytisch	29
4.3.	Identitätssatz für analytische Funktionen	30
4.4.	Satz von Liouville	32
4.5.	Hauptsatz der Algebra	33
4.6.	Maximumprinzip und Gebietstreue	34
5.	Singularitäten: Lokale Theorie	38
5.1.	Der Hebbarkeitssatz und Cauchys Integralformel auf Kreisringen	38
5.2.	Laurentreihen	39
5.3.	Isolierte Singularitäten	42
5.4.	Anwendung: Partialbruchzerlegung und Fourierreihen	44
6.	Globale Funktionentheorie	48
6.1.	Windungszahl	48
6.2.	Residuensatz	50
6.3.	Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz	51
	Index	54

LITERATUR

Die folgenden Lehrbücher zur Funktionentheorie umfassen mehr Stoff als die Vorlesung:

- [A] Ahlfors: Complex Analysis, Mc Graw-Hill 1953, 1979. Der Klassiker. Die Geometrie komplexer Abbildungen wird betont.
- [BF] Freitag, Busam: Funktionentheorie 1. Ein gut durchdachtes, explizites Buch. Vielleicht das beste zum Lernen und Verstehen. Springer 1993, 2000
- [C] Conway: Complex Analysis I (+II). Hier findet man alles.
- [FL] Fischer-Lieb: Funktionentheorie, Vieweg. Konzis.
- [R] Remmert: Funktionentheorie, Springer. Gemächlich, interessante historische Bemerkungen.

In folgenden Analysis-Lehrbüchern finden sich Kapitel, die in die Funktionentheorie einführen. Sie haben ungefähr den Umfang der Vorlesung, und sie wählen den gleichen Zugang zur Cauchyschen Integralformel wie unsere Vorlesung.

- [Hi] S. Hildebrandt: Analysis II, Springer 2003. Unsere Darstellung entspricht ziemlich genau diesem Buch.
- [K] Königsberger: Analysis II, Springer. Es wird der etwas abstraktere Zugang zum Integrabilitätsproblem gewählt: über Pfaffsche Formen. Bis auf diesen Punkt entspricht aber der Inhalt ziemlich genau der Vorlesung.

Ich habe auch ein Skript von Herrn Kümmerer vom SS 04 benutzt.

EINFÜHRUNG

Was ist Funktionentheorie? Funktionentheorie ist nicht die Lehre von Funktionen, sondern von *komplex differenzierbaren* Funktionen. Die englische Übersetzung des Begriffs Funktionentheorie lautet *complex analysis*; das trifft den Inhalt unserer Vorlesung genau.

Die Funktionentheorie gilt als besonders elegante und ausgereifte Mathematik, als besonders “schön”. Als ein Beispiel für die Brillanz der Ergebnisse nenne ich:

$$\begin{aligned} f \text{ komplex differenzierbar} &\iff f \text{ beliebig oft komplex differenzierbar} \\ &\iff f \text{ analytisch, d.h. lokal als Potenzreihe darstellbar} \\ &\iff \text{ lokal hat } f \text{ eine Stammfunktion } F \end{aligned}$$

Die Funktionentheorie gibt für manche reellen Phänomene erst die richtige Erklärung. Für einen Fall ist uns das bereits bekannt: Wir haben die “imaginären” Zahlen benutzt, um offenzulegen, wie die Exponentialfunktion mit den Winkelfunktionen zusammenhängt (Formel?). Wir werden das aber auch in weiteren Fällen sehen, wenn wir beispielsweise

- herausfinden, wo Funktionen mit ihren Taylorreihen übereinstimmen, oder
- den Hauptsatz der Algebra beweisen (Polynome haben soviele komplexe Nullstellen wie ihr Grad angibt).

Um ein weiteres überraschendes Ergebnis hier schon anzukündigen, nenne ich die Berechnung vieler uneigentlicher (reeller) Integrale, z.B. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Zur Darstellung. Die Funktionentheorie ist ein klassisches Gebiet. Viele Resultate werden daher in allen Vorlesungen und allen Büchern ganz genauso hergeleitet. Auch die Auswahl der Inhalte liegt ziemlich fest; man kann allenfalls bei schnellerer Gangart noch den Riemannschen Abbildungssatz behandeln.

Von der üblichen Darstellung weiche ich nur bei der Einführung des komplexen Kurvenintegrals ab. Hier gebe ich nicht den komprimierten Weg über das Lemma von Goursat an. Statt dessen gehe ich reell vor und zeige, dass im holomorphen Fall der Integrand rotationsfrei ist, so dass das Kurvenintegral wegunabhängig wird. Ich denke, man versteht so besser, woher die Integraldarstellung für holomorphe Funktionen kommt, und ich glaube auch den Physikern unter den Zuhörern mit diesem Zugang zu nützen.

Die im Skript in Kleindruck wiedergegebenen Teile habe ich in der Vorlesung nicht behandelt. Ich danke vielen Hörern für die Mitteilung von Korrekturen.

1. HOLOMORPHE FUNKTIONEN

In diesem Abschnitt wollen wir komplexe Differenzierbarkeit verstehen. Dabei wollen wir aus den Analysis-Vorlesungen verschiedene Resultate wiederholen, zum Beispiel über komplexe Zahlen, Differenzieren, Potenzreihen. Bitte schauen Sie diese Ergebnisse noch einmal nach.

1.1. Komplexe Zahlen und die Geometrie der komplexen Multiplikation. Wir wiederholen aus der Vorlesung Analysis 1: Die Menge \mathbb{R}^2 wird durch Vektoraddition und die Multiplikation

$$(1) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix}$$

zum Körper \mathbb{C} . Wir benutzen die Standardbasis von \mathbb{R}^2 und schreiben

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y =: x + iy,$$

wobei laut (1) gilt $i^2 = -1$. Der entscheidende Punkt bei dieser Notation ist, dass die Einbettung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ein *Körperhomomorphismus* ist, d.h. die Einbettung ist verträglich mit Addition und Multiplikation: Man erhält dasselbe Ergebnis, wenn man z.B. erst das Produkt ax berechnet und dann mit $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ identifiziert, oder wenn man umgekehrt die identifizierten Werte $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ gemäß (1) multipliziert. Wir werden in Zukunft nicht zwischen \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} unterscheiden.

Bevor wir uns mit der Multiplikation näher befassen, erinnern wir an einige Bezeichnungen:

Konjugiertes: $\bar{z} := x - iy$.

Real- und Imaginärteil: $\operatorname{Re} z := x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\operatorname{Im} z := y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Betrag: $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

Argument: Sei $z \neq 0$. Gilt $e^{i\varphi} = z$, so heißt $\varphi = \arg z \in \mathbb{R}$ Argument von z .

Wir erinnern daran, dass $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ normierter Vektorraum ist. Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung und außerdem noch die Verträglichkeitsbedingung $|wz| = |w||z|$. Wir hatten bereits gezeigt, dass \mathbb{C} keine Ordnung hat (warum?).

Wir betrachten nun die komplexe Multiplikation als lineare Abbildung. Folgende elementare Feststellungen werden in Kürze für uns wichtig werden:

Satz 1. *Für eine lineare Abbildung*

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

sind äquivalent:

(i) A wird durch komplexe Multiplikation dargestellt, d.h. es existiert $c = a + ib \in \mathbb{C}$, so dass $Az = cz = ax - by + i(ay + bx)$.

(ii) Für die Matrixdarstellung $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ gilt

$$(2) \quad \alpha = \delta \quad \text{und} \quad \beta = -\gamma.$$

(iii) A ist eine Drehstreckung, d.h. es existieren $\lambda \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit

$$Az = \lambda \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} z.$$

(iv) $A = 0$ oder A ist konform [conformal], d.h. winkelerhaltend und orientierungstreu.

Dabei heißt A orientierungstreu [orientation preserving], wenn $\det A > 0$ gilt. Weiterhin ist der Winkel $\angle(v, w) \in [0, \pi]$ zweier von 0 verschiedener Vektoren v, w ist bestimmt durch $\cos \angle(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$. Daher kann man definieren, dass eine Abbildung A winkelerhaltend [angle preserving] ist, genau dann wenn gilt $\|z\| \|w\| \langle Az, Aw \rangle = \|Az\| \|Aw\| \langle z, w \rangle$. Indem wir diese Formel mit hochmultiplizierten Nenner hinschreiben, können wir die Gültigkeit für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ verlangen.

Beweis. “(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)”: Klar durch Vergleich der Matrixdarstellung.

“(i) \Rightarrow (iii)”: Falls $c = 0$ setze $\lambda = 0$ und φ beliebig. Sonst gilt für $\lambda := |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$, dass $(\frac{a}{\lambda})^2 + (\frac{b}{\lambda})^2 = 1$. Also existiert ein φ mit $e^{i\varphi} = \frac{a}{\lambda} + i\frac{b}{\lambda} \in \mathbb{S}^1$ und daher gilt $cz = \lambda e^{i\varphi} z = \lambda \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} z$.

“(iii) \Rightarrow (iv)”: Wegen $\det A = \lambda^2$ und der Winkelerhaltung von Drehungen klar.

“(iv) \Rightarrow (iii)”: Falls $A = 0$, ist das klar. Anderenfalls betrachte z, w linear unabhängig. Wegen Orientierungstreue sind dann auch Az und Aw linear unabhängig. Wir betrachten nun die nichtentarteten Dreiecke mit Ecken $0, z, w$ und mit Ecken $0, Az, Aw$. Wegen der Winkelerhaltung gilt

$$\angle(Az, Aw) = \angle(z, w)$$

Entsprechendes gilt für die anderen beiden Winkel. Also sind die Dreiecke ähnlich. Insbesondere ist die Länge eines Bildvektors $|Az|$ ein konstantes Vielfaches von $|z|$. Setzen wir also $\lambda := \frac{|Az|}{|z|} \neq 0$, so ist die Abbildung $\frac{1}{\lambda}A$ euklidisch (d.h. Skalarprodukt-erhaltend). Wegen der Orientierungsbedingung ist $\frac{1}{\lambda}A \in \text{SO}(2)$, d.h. A selbst ist Drehstreckung. \square

Beispiele. 1. $z \mapsto iz$ ist 90-Grad-Drehung mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Die Multiplikation $z \mapsto (a + ib)z = cz$ ist also eine Drehstreckung mit Dilatationsfaktor $\lambda = |c|$ und Drehwinkel $\varphi = \arg c$.

3. Spiegelungen, z.B. $z \mapsto \bar{z}$, sind orientierungsvertauschend und daher nicht konform.

1.2. Holomorphe Funktionen. Wann immer wir in dieser Vorlesung Mengen $U \subset \mathbb{C}$ oder $U \subset \mathbb{R}^n$ betrachten, sollen diese offen sein. Wir wiederholen aus Analysis 1:

Satz 2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ und $z \in U$. Für $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) Es existiert der Grenzwert

$$c := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

(ii) Es gibt $c \in \mathbb{C}$, so dass für alle h mit $z+h \in U$ gilt

$$(3) \quad f(z+h) = f(z) + ch + r_z(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_z(h)}{h} = 0.$$

(iii) Es gibt eine im Punkt z stetige Funktion $d: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z+h) = f(z) + d(z+h)h$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Dividiere $r_z(h) = f(z+h) - f(z) - ch$ durch h und nimm $\lim h \rightarrow 0$.

(ii) \Rightarrow (iii): Setze $d(z+h) := c + \frac{1}{h}r_z(h)$; dann ist d in $h=0$ stetig mit $d(z+0) = c$.

(iii) \Rightarrow (i): $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = d(z+h)$ hat einen Grenzwert $c := d(z)$. \square

Definition. (i) Wenn eine der Bedingungen des Satzes gilt, heißt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ *komplex differenzierbar* in $z \in U$ und man schreibt $f'(z) := c$ bzw. $f'(z) = d(z)$.

(ii) Eine reell stetig differenzierbare Abbildung $f \in C^1(U, \mathbb{C})$ heißt *holomorph* [holomorphic], wenn U offen ist und f in jedem Punkt $z \in U$ komplex differenzierbar ist.

Bemerkung. Die Forderung $f \in C^1$ wird in der Literatur oft nicht gestellt. Tatsächlich werden wir in 4.1 zeigen, dass sie automatisch für jede komplex differenzierbare C^0 -Funktion erfüllt ist.

Beispiele. 1. z^n ist holomorph auf ganz \mathbb{C} (wie zeigt man das?)

2. Die Spiegelung an der x -Achse $f(z) = \bar{z}$ ist in keinem Punkt von \mathbb{C} komplex differenzierbar, denn ihr Differenzenquotient

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

ist 1 für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber -1 für $h \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Grenzwert $h \rightarrow 0$ existiert also nicht.

Wie in Analysis 1 gezeigt, kann man aus Satz 2 folgern:

- Differenzierbare Funktionen sind stetig.
- Holomorphie bleibt erhalten bei der Bildung von Summen, Produkten, Quotienten, Inversen und Verkettungen, und es gelten die wohlbekanntesten Ableitungsregeln.
- Insbesondere ist $f \mapsto f'$ linear, und holomorphe Funktionen bilden einen Ring.
- Polynome sind holomorph, ebenso rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich.
- Holomorphe Funktionen mit Ableitung 0 auf wegzusammenhängenden offenen Mengen

(Gebieten) sind konstant (Übung).

Welche der drei Charakterisierungen des Satzes benutzt man zum Beweis?

2. Vorlesung, Donnerstag 25.10.07

1.3. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Wir geben nun die Antwort auf die Frage: Unter welchen Bedingungen ist eine differenzierbare Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 holomorph?

Dazu erinnern wir zuerst an Analysis 2. Die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt differenzierbar in $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, wenn es eine lineare Abbildung df_z gibt, dargestellt durch eine 2×2 -Matrix A , so dass

$$(4) \quad f(z+h) = f(z) + Ah + r(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Falls $f = (u, v)$ stetig partiell differenzierbar ist, gilt für die Jacobimatrix

$$(5) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix}.$$

Satz 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig partiell differenzierbar in U . Die Abbildung f ist genau dann auf U holomorph, wenn $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z)$$

für alle $z = x + iy \in U$ erfüllen. Es gilt dann

$$(7) \quad f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = v_y(z) - iu_y(z)$$

Beispiel. Für $f(z) = z^2$ mit $u(x) + iv(x) = (x^2 - y^2) + i2xy$ ist (6) erfüllt, denn $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ und $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$, sowie andererseits $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ und $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$.

Beweis. Sei f stetig partiell differenzierbar, d.h. die Jacobimatrix A aus (5) erfüllt die Differenzierbarkeitsdefinition (4). Nach Satz 1 (i) und (ii) folgt aus (6), dass das Matrixprodukt mit A eine komplexe Multiplikation darstellt. Daher erfüllt f auch die komplexe Differenzierbarkeitsdefinition (3).

Umgekehrt hat für holomorphes f die Linearisierung von f in z eine Matrix A , die eine komplexe Multiplikation darstellt. Nach Satz 1 (i) und (ii) gilt daher $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, d.h. die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten.

Die Formel für $f'(z)$ folgt daraus, dass $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ die Multiplikation mit $a + ib$ darstellt. \square

Wir können also sagen, dass die für Holomorphie verlangte \mathbb{C} -Linearität des Differentials viel stärker ist als reelle Differenzierbarkeit: Die \mathbb{C} -Linearität bedingt Identitäten für die Jacobi-Matrix, eben die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Geometrisch bedeutet sie, dass die lineare Approximation einer holomorphen Abbildung konform ist.

Einerseits sind also zufällig gewählte reell differenzierbare Funktionen $u + iv$ mit Wahrscheinlichkeit 0 holomorph, andererseits sind die meisten komplex definierten Funktionen holomorph, weil Polynome und (wie wir bald sehen werden:) Potenzreihen holomorph sind.

Aus der Zusatzinformation der Differentialgleichungen (6), die für holomorphe Funktionen gilt, können wir starke Folgerungen ziehen:

Korollar 4. (i) Die Jacobimatrix J_f einer holomorphen Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ beschreibt für jedes $p \in U$ eine Drehstreckung; insbesondere gilt $\text{rank}(J_f(z)) \in \{0, 2\}$, d.h. der Rang kann nicht 1 sein.

(ii) Es sei $f = u + iv \in C^2(U, \mathbb{C})$ holomorph. Dann sind Real- und Imaginärteil harmonisch [harmonic], $0 = \Delta u = \Delta v$.

(iii) Ist f holomorph und reellwertig ($v \equiv 0$), so ist f lokal konstant.

Dabei heißt eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ lokal konstant, wenn es für jedes $z \in U$ einen Ball $B = B_r(z)$ gibt, so dass $f|_B$ konstant ist. Zum Beispiel ist die Funktion $f: B_1(0) \cup B_1(2) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1$ für $z \in B_1(0)$ und $f(z) = 2$ für $z \in B_1(2)$ lokal konstant, aber nicht (global) konstant.

Beweis. (ii) Es gilt

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \stackrel{(6)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

denn partielle Ableitungen vertauschen nach dem Satz von Schwarz. Ebenso für v . \square

Bemerkung. Ist u harmonisch auf einer ‐lochlosen‐ Menge U gegeben, so lässt sich v , ebenfalls harmonisch, finden, so dass $u + iv$ holomorph ist. Beweis durch Aufintegrieren, eventuell später.

1.4. Potenzreihen. Wir erinnern an folgende Definitionen aus Analysis 1:

- Konvergenz und absolute Konvergenz einer Reihe,
- Majorantenkriterium für die absolute Konvergenz einer Reihe, insbesondere Quotienten- und Wurzelkriterium,
- gleichmäßige Konvergenz einer Folge von Funktionen.

Folgender Begriff ist in diesem Zusammenhang nützlich:

Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Funktionenfolge. Dann heißt (f_n) *lokal gleichmäßig konvergent* gegen $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, wenn es für jedes $z \in U$ eine Umgebung $V = V(z)$ gibt, so dass $(f_n|_V)$ gleichmäßig gegen $f|_V$ konvergiert.

Beispiele. 1. $f_n(z) = z^n$ konvergiert auf $U = B_1(0)$ lokal gleichmäßig gegen $f(z) = 0$. Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig.

2. Die *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert auf $U = B_1(0)$ lokal gleichmäßig gegen $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ (woher kommt die Formel?).

Ein wichtiges Ergebnis aus Analysis 1 betrifft die Stetigkeit der Grenzfunktion: Jede lokal gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen (f_n) hat einen stetigen Grenzwert f . Der Beweis benutzt die Dreiecksungleichung und ein $\varepsilon/3$ -Argument.

Wir betrachten nun Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$.

Definition (Cauchy-Hadamard). Der *Konvergenzradius* von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$ ist die Zahl

$$R := \sup \left\{ r \geq 0 : (a_n r^n) \text{ ist beschränkte Folge} \right\} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty].$$

Falls $R = \infty$ setzen wir $B_{\infty}(b) = \mathbb{C}$.

3. Vorlesung, Donnerstag 1.11.07

Das Hauptergebnis über Potenzreihen aus Analysis 1 ist:

Satz 5. Für jede Potenzreihe $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$ mit $(a_n) \in \mathbb{C}$ gilt:

(i) $P(z)$ konvergiert absolut und lokal gleichmäßig auf $B_R(b) := \{z \in \mathbb{C} : |z-b| < R\}$.

(ii) $P(z)$ divergiert auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-b| > R\}$.

Über Konvergenz auf $\partial B_R(b)$ läßt sich keine allgemeine Aussage treffen.

Wir wiederholen die entscheidenden Argumente des Beweises. Die Divergenz folgt daraus, dass die Summanden außerhalb von $B_R(b)$ unbeschränkt bleiben. Die Konvergenz folgt durch Majorisierung mit der geometrischen Reihe: Für $z \in B_R(b)$ wähle ρ mit $|z-b| =: r < \rho < R$. Dann gilt tatsächlich $|a_n (z-b)^n| = |a_n \rho^n| \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leq C \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ mit geeignetem $C > 0$ und $\frac{r}{\rho} < 1$.

Den folgenden Satz führen wir hier auf, auch wenn er sich später einfacher ergeben wird.

Satz 6. Eine komplexe Potenzreihe $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$ ist im Innern ihres Konvergenzkreises $B_R(b)$ holomorph und hat dort die Ableitung $Q(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-b)^{n-1}$.

Beweis. Wir zeigen, dass P komplex differenzierbar ist mit $P' = Q$. Die Idee ist, den Satz über das Vertauschen von Integration mit gleichmäßiger Konvergenz anzuwenden. Seien dazu P_n und $Q_n = P'_{n+1}$ die Partialsummen von P und Q . Dann ist $P_n = \int Q_{n-1}$, und dies wird zeigen $P = \lim P_n = \lim \int Q_{n-1} = \int \lim Q_{n-1} = \int Q$; mit dem Hauptsatz folgt dann $P' = Q$. Wir führen dies nun durch.

In Analysis 1 hatten wir schon gezeigt, dass P und Q denselben Konvergenzradius R haben und daher lokal gleichmäßig konvergente Reihen auf $B_R(b)$ darstellen; insbesondere ist Q stetig. Nach dem Hauptsatz gilt für $z, z+h \in B_R(b)$

$$P_n(z+h) - P_n(z) = \int_0^1 \frac{d}{dt} P_n(z+th) dt = h \int_0^1 Q_{n-1}(z+th) dt.$$

Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz $Q_n \rightarrow Q$ dürfen wir den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ mit der Integration vertauschen:

$$P(z+h) - P(z) = h \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 Q_n(z+th) dt = h \int_0^1 Q(z+th) dt.$$

Division durch h und danach Grenzwertbildung $h \rightarrow 0$ ergibt wie gewünscht

$$P'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(z+h) - P(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 Q(z+th) dt \stackrel{(*)}{=} Q(z).$$

Dabei gilt (*) wegen der Stetigkeit von Q (kleine Übung). □

Beispiele. Auf ganz \mathbb{C} sind holomorph

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Durch termweises Ableiten gemäß dem Satz folgen die Differentiationsregeln $\exp' = \exp$, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$. Wir hatten sie in Analysis 1 für \exp durch Differenzenquotienten gezeigt, und als Konsequenz die Formeln für $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ und für $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ erhalten.

2. KURVENINTEGRALE: REELLE THEORIE

Kurvenintegrale spielen im Komplexen eine besondere Rolle, da durch sie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung seine Verallgemeinerung findet. Aus zwei Gründen möchte ich Ihnen hier die Theorie reell und allgemein in \mathbb{R}^n vorstellen:

1. Man versteht den funktionentheoretischen Fall viel besser, wenn man sieht, wie er als Spezialfall einer allgemeinen Bedingung auftritt.
2. In der Physik sind Kurvenintegrale und Integrierbarkeitsfragen von großer Bedeutung. Daher ist es gut, den Fall \mathbb{R}^3 mitzubehandeln.

2.1. Potentialfunktionen. Für eine Funktion g von einer Veränderlichen ist nach dem Hauptsatz $f(x) := \int_a^x g(t) dt$ eine Stammfunktion von g , also $f' = g$. Sei nun eine Funktion mehrerer Veränderlicher $f \in C^1(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gegeben. In diesem Fall definiert der Gradient $X := \text{grad } f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf U . Im folgenden soll U stets für eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n stehen.

Um die Umkehrung zu untersuchen, ist folgender Begriff hilfreich:

Definition. Sei $X \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Eine Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $X = \text{grad } f$ heißt *Potential(funktion)* von X .

Natürlich kann ein Vektorfeld X ein Potential f nur bis auf eine Konstante bestimmen.

Eine gute Deutung ist folgende: Wir stellen uns den Graphen von f als eine Höhenfunktion auf U vor. Bekanntlich ist $X := \text{grad } f$ dann die Richtung des steilsten Anstiegs. Wenn wir aber zuerst für jeden Punkt den "Anstiegsvektor" X (also Richtung und Größe des Anstiegs) vorschreiben, gibt es dann ein Gebirge f dafür? Dies wird nicht immer der Fall sein, z.B. darf X sicher keine geschlossenen Kurven als Integralkurven besitzen.

Ein anderer Grund dafür, dass nicht jedes Vektorfeld ein Potential besitzt, ist eine Parameterzählung: Die n Komponenten von X sollten nicht durch die eine Komponente von f ausdrückbar sein. Tatsächlich erhält man sofort eine notwendige Bedingung:

Satz 7. *Hat ein Vektorfeld $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Potential $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, so ist die Jacobimatrix J_X von X symmetrisch (bzw. dX selbstadjungiert) auf ganz U , d.h. es gilt*

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} X_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} X_j(x) \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n, \quad x \in U.$$

Beweis. Wir schreiben kurz ∂_i für $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Wegen $X_i = \partial_i f$ gilt nach dem Satz von Schwarz

$$\partial_j X_i = \partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f = \partial_i X_j. \quad \square$$

Für $n = 2$ ist (8) die eine (nicht-triviale) Bedingung $\operatorname{rot} X := \partial_1 X_2 - \partial_2 X_1 = 0$, wobei $\operatorname{rot}: U \rightarrow \mathbb{R}$ die *Rotation* von X heißt. Für $n = 3$ bedeutet (8) drei Bedingungen, die Physiker ebenfalls gern in der Form $\operatorname{rot} X = 0$ schreiben, wobei die Rotation von X ein Vektorfeld ist:

$$\operatorname{rot} X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \operatorname{rot} X := \begin{pmatrix} \partial_2 X_3 - \partial_3 X_2 \\ \partial_3 X_1 - \partial_1 X_3 \\ \partial_1 X_2 - \partial_2 X_1 \end{pmatrix}$$

Als Vektor in welchem \mathbb{R}^k würden Sie demnach die Rotation im Vierdimensionalen darstellen?

Beispiele ($n = 2$): 1. Das Feld $X(x, y) := -\frac{1}{\|(x, y)\|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hat das Potential $f(x, y) := \frac{1}{\|(x, y)\|}$, denn

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \operatorname{grad} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = X(x, y).$$

2. $X(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ hat kein Potential, denn $\operatorname{rot} X = \partial_1 x - \partial_2(-y) = 1 - (-1) \neq 0$.

4. Vorlesung, Donnerstag 8.11.07 _____

2.2. Kurvenintegrale. Um zu untersuchen, ob die Bedingung (8) hinreichend ist, wollen wir ein Vektorfeld X aufintegrieren zu einem Potential f , so wie wir es für die Stammfunktion einer univariaten Funktion getan haben. Allerdings müssen wir nun längs Kurven integrieren.

Wir erinnern zunächst an Analysis 2:

- Eine *Kurve* ist eine Abbildung $c \in C^0(I, \Omega)$. Dabei sei Ω Teilmenge von \mathbb{R}^n oder eines metrischen Raumes M , und I Intervall, und zwar hier stets $I = [a, b]$.
- Die Kurve heißt *geschlossen* [closed] oder eine *Schleife* [loop], wenn $c(a) = c(b)$ gilt.
- Wir nennen die Kurve *stückweise* [piecewise] C^1 , falls es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$ gibt, so dass jedes Teilstück $c|_{[t_k, t_{k+1}]}$ eine C^1 -Kurve ist ($k = 0, \dots, n$).
- Die Bildmenge $\operatorname{Spur}(c) = \{c(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I\}$ heißt *Spur*.

Beispiele. 1. Für $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist $\operatorname{Spur}(c) = \mathbb{S}^1$.

2. Jedes Polygon kann man als Spur einer stückweise C^1 -Kurve erhalten, die $|c'(t)| = 1$ mit Ausnahme der Ecken des Polygons erfüllt.

Der wesentliche Grund, stückweise C^1 -Kurven zu betrachten, liegt in der Möglichkeit, sie aneinanderzuhängen: Sind $c_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Kurven mit $c_1(b_1) = c_2(a_2)$, so erklärt man ihre *Summe* $c_1 + c_2$ durch

$$c_1 + c_2: [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \begin{cases} c_1(t), & t \in [a_1, b_1], \\ c_2(t + a_2 - b_1), & t \in [b_1, b_1 + (b_2 - a_2)]. \end{cases}$$

Der c_2 -Teil ist dabei gerade so unparametrisiert, dass seine Parametrisierung an die von c_1 unmittelbar anschließt. Die Summe von stückweise C^1 -Kurven ist wiederum stückweise C^1 . Dies wäre jedoch nicht richtig für C^1 selbst.

Als zu $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ *inverse Kurve* bezeichnet man die Kurve

$$c^-: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad c^-(t) = c(b - (t - a)).$$

Wir benutzen von nun an das Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ von \mathbb{R}^n .

Definition. Ist $c \in C^1([a, b], U)$ eine Kurve und $X \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld, so nennt man

$$\int_c X \cdot ds := \int_a^b \langle X(c(t)), c'(t) \rangle dt$$

das *Kurvenintegral* von X längs c . Für stückweise C^1 -Kurven $c = c_1 + \dots + c_n$ (mit $c_i \in C^1$) setzt man entsprechend $\int_c X \cdot ds := \sum_{i=1}^n \int_{c_i} X \cdot ds$.

Mit der Notation folge ich dem in der Physik üblichen Gebrauch, man denkt sich dabei den Integranden als Skalarprodukt des Vektorfelds X mit dem Linienelement ds .

Direkt aus der Definition folgt

$$(9) \quad c = c_1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad \int_c X \cdot ds = \int_{c_1} X \cdot ds + \int_{c_2} X \cdot ds.$$

Beispiele. 1. Das bekannteste Beispiel aus der Physik ist die Arbeit $-\int_c F \cdot ds$, die ein Teilchen gegen die Kraft F längs eines Weges c aufwenden muss.

2. Es sei $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $c(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ die Parametrisierung des Einheitskreises.

a) Sei zuerst $X(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Diese Kraft steht senkrecht auf c' , daher braucht man keine Arbeit zu leisten. In der Tat:

$$\int_c X \cdot ds = \int_0^{2\pi} \langle X(c(t)), c'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = 0$$

b) Sei nun $Y(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Nun sind c' und Y parallel, sogar gleich, und entsprechend ist

$$\int_c Y \cdot ds = \int_0^{2\pi} \langle Y(c(t)), c'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = 2\pi.$$

3. Das Kurvenintegral ist wegabhängig: Mit Y wie in 2b) betrachten wir nun den konstanten Weg $\tilde{c}(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, der denselben Anfangs-/Endpunkt hat wie der Kreis c von 2. Wegen $\tilde{c}' \equiv 0$ folgt jedoch diesmal $\int_{\tilde{c}} Y \cdot ds = 0$.

Wie verhält sich das Kurvenintegral, wenn man c *unparametrisiert*? Dies bedeutet, dass wir $\int_{c \circ \varphi} X \cdot ds$ für einen Diffeomorphismus $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ betrachten.

Satz 8. (i) Das Kurvenintegral ist invariant gegenüber orientierungserhaltenden Umparametrisierungen mit $\varphi' > 0$.

(ii) Es gilt $\int_{c^-} X \cdot ds = - \int_c X \cdot ds$.

Beweis. (i) Es gelte $\varphi' > 0$, insbesondere $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$.

$$\begin{aligned} \int_{c \circ \varphi} X \cdot ds &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle X((c \circ \varphi)(t)), (c \circ \varphi)'(t) \rangle dt \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} \langle X(c(\varphi(t)), c'(\varphi(t))) \rangle \varphi'(t) dt \\ &\stackrel{\text{Substitutionsregel}}{=} \int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} \langle X(c(\tau)), c'(\tau) \rangle d\tau = \int_c X \cdot ds \end{aligned}$$

Für stückweise C^1 -Kurven muss man entsprechend Summen betrachten.

(ii) Gilt $\varphi' < 0$, so müssen wir die Integrationsgrenzen α und β vertauschen. Wir erhalten daher das gleiche Integral mit umgekehrtem Vorzeichen. \square

2.3. Gebiete. Überraschenderweise wird die Antwort auf unser Problem davon abhängen, welche Eigenschaften der Definitionsbereich des Vektorfeldes hat. Wir führen die nötigen topologischen Begriffe hier ein.

Dazu sei Ω eine Teilmenge von \mathbb{R}^n oder eines metrischen Raumes M .

Definition. Eine Menge Ω heißt *wegzusammenhängend* [*path connected*], wenn es für je zwei Punkte $p, q \in \Omega$ eine stückweise C^1 -Kurve $c: [0, 1] \rightarrow \Omega$ gibt, so dass $c(0) = p$ und $c(1) = q$.

Beispiele. 1. Per Definition ist ein *Intervall* eine wegzusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R} .
2. Die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht wegzusammenhängend, jedoch ist es $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. (Beweise?)
3. Der Graph von $\sin \frac{1}{x}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, vereinigt mit der y -Achse, ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 , die nicht wegzusammenhängend ist.

Wenn Ω offen ist, ist es egal, ob man für die Kurve stetig, stückweise C^1 , oder glatt fordert.

Für metrische (oder topologische) Räume M gibt es auch folgenden Begriff:

Definition. (i) Sei $\Omega \subset M$ beliebig. Dann heißt eine Teilmenge $U \subset \Omega$ *relativ offen* in Ω [*relatively open*], wenn es eine offene Menge $V \subset M$ gibt mit $U = V \cap \Omega$.

(ii) Eine Menge $\Omega \subset M$ heißt *zusammenhängend* [*connected*], wenn es keine disjunkte Zerlegung $\Omega = A \cup B$ mit relativ offenen Mengen $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ gibt.

Beispiele. 1. Sei $M := \mathbb{R}$ und $\Omega = [0, 1]$. Das Intervall $U := (\frac{1}{2}, 1]$ ist eine relativ offene Menge von Ω , wie die in \mathbb{R} offene Menge $V := (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ zeigt.

2. Die Teilmenge $\Omega := [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ist nicht zusammenhängend, denn die beiden relativ

offenen Teilmengen $A := [0, \frac{1}{2})$ und $B := (\frac{1}{2}, 1]$ von Ω ergeben eine disjunkte Zerlegung $\Omega = A \cup B$.

Betrachtet man speziell relativ offene Teilmengen von offenen Mengen

Falls man relativ offene Teilmengendass die betrachtete Teilmenge Ω offen ist, ist eine relativ offene Teilmenge U selbst wiederum offen. Im allgemeinen gilt "wegzusammenhängend \Rightarrow zusammenhängend". Beispiel 3 ist aber noch zusammenhängend, jedoch nicht wegzusammenhängend; daher gilt die Umkehrung nicht. Aber man kann zeigen:

Satz 9. *Ist $U \subset M$ offen, so gilt: U wegzusammenhängend $\Leftrightarrow U$ zusammenhängend.*

Daher lassen wir bei offenen wegzusammenhängenden Mengen das Wort "weg" weg.

5. Vorlesung, Donnerstag 15.11.07 _____

In der Analysis braucht man häufig folgende Definitionsbereiche für Funktionen:

Definition. Eine offene zusammenhängende Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Gebiet [domain]*.

Beispiel. Ab Dimension $n = 2$ sind offene Teilmengen von \mathbb{R}^n ohne endlich viele Punkte Gebiete, nicht aber für $n = 1$. (Gilt das auch für unendlich viele Punkte?)

2.4. Existenz von Potentialen und Kurvenintegrale. Wir wollen nun ein Potential als das Kurvenintegral eines Vektorfeldes gewinnen. Warum sollte das Ergebnis lediglich von den Endpunkten der betrachteten Kurven abhängen? Bevor wir das Problem definitiv beantworten, zeigen wir zunächst, dass dies immerhin äquivalent ist zur Existenz eines Potentials:

Satz 10. *Sei U ein Gebiet und $X \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Es existiert eine Potentialfunktion $f \in C^1(U)$ mit $X = \text{grad } f$.*
- (ii) *Für je zwei Kurven $c_1, c_2: [a, b] \rightarrow U$, die stückweise C^1 sind und gemeinsamen Anfangspunkt $c_1(a) = c_2(a) =: x$ und Endpunkt $c_1(b) = c_2(b) =: y$ haben, gilt*

$$\int_{c_1} X \cdot ds = \int_{c_2} X \cdot ds.$$

- (iii) *Für jede stückweise C^1 Schleife $c: [a, b] \rightarrow U$ gilt $\int_c X \cdot ds = 0$.*

In der Physik heißen Vektorfelder, die eine dieser Bedingungen erfüllen, *konservativ*.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Wir zeigen $\int_c X \cdot ds = f(y) - f(x)$, so dass das Integral unabhängig von der gewählten Kurve c ist. In der Tat:

$$(10) \quad \int_c X \cdot ds = \int_c \text{grad } f \cdot ds = \int_a^b \langle \text{grad } f(c(t)), c'(t) \rangle dt \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b (f \circ c)'(t) dt \\ = f(c(b)) - f(c(a)) = f(y) - f(x)$$

(ii) \Rightarrow (i): Wir fixieren ein $p \in U$ und setzen

$$(11) \quad f(x) := \int_c X \cdot ds \quad \text{für } c \text{ stückweise } C^1([a, b], U) \text{ mit } c(a) = p \text{ und } c(b) = x.$$

Weil U zusammenhängend ist, existiert für beliebiges $x \in U$ ein solcher Weg c , und nach Annahme ist dann $f(x)$ unabhängig von der Wahl des Weges c . Also ist $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert.

Wir müssen nachweisen $\text{grad } f = X$. Für jedes $1 \leq i \leq n$ zeigen wir dazu

$$(12) \quad \partial_i f(x) = X_i(x) \quad \text{für jedes } x \in U.$$

Wir wollen $\partial_i f(x)$ als Differenzenquotienten berechnen. Dazu brauchen wir den Wert von f in Punkten $x + te_i$. Nach Voraussetzung ist es egal, welche Kurve wir verwenden, um p mit diesen Zielpunkten zu verbinden.

Zunächst gibt es wegen U offen ein $\varepsilon > 0$, so dass die ganze Strecke von $x - \varepsilon e_i$ bis $x + \varepsilon e_i$ in U enthalten ist. Weil U zusammenhängend ist, gibt es eine Kurve c von p nach $x - \varepsilon e_i$. Wir parametrisieren c mit dem Intervall $[0, 1 - \varepsilon]$, was nach Satz 8 den Wert von (11) unverändert läßt. Wir bilden nun die Summe von c mit der angegebenen Strecke; diese Summe ist stückweise C^1 . Das heißt, wir erklären den fortgesetzten Teil von c : $[0, 1 + \varepsilon] \rightarrow U$ durch $c(1 + t) := x + te_i$ für $|t| < \varepsilon$. Offenbar gilt auf dem Intervall $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ dann $c' \equiv e_i$.

Wir berechnen nun $\partial_i f(x)$ durch Differenzenquotienten, wobei wir $|t| < \varepsilon$ voraussetzen:

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(1 + t)) - f(c(1))}{t} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_0^{1+t} \langle X(c(t)), c'(t) \rangle dt - \int_0^1 \langle X(c(t)), c'(t) \rangle dt \right) \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_1^{1+t} \langle X(c(t)), c'(t) \rangle dt = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_1^{1+t} X_i(c(t)) dt = X_i(x)$$

Wegen der Stetigkeit der skalarwertigen Funktion $X_i \circ c$ folgt das letzte Gleichheitszeichen aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. Die Rechnung bestätigt (12).

(ii) \Leftrightarrow (iii): Seien c_1, c_2 zwei Kurven mit denselben Anfangs- und Endpunkten. Dann ist $c := c_1 + c_2^-$ eine geschlossene Kurve. Umgekehrt kann man jede geschlossene Kurve c

durch Unterteilung an einem beliebigen Punkt t_0 des Definitionsintervalls in zwei Kurven $c = c_1 + c_2^-$ zerlegen, so dass c_1 und c_2 dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen.

In beiden Fällen gilt aber

$$(14) \quad \int_c X \cdot ds \stackrel{(9)}{=} \int_{c_1} X \cdot ds + \int_{c_2^-} X \cdot ds \stackrel{\text{Satz 8(ii)}}{=} \int_{c_1} X \cdot ds - \int_{c_2} X \cdot ds,$$

so dass, wenn eine Seite der Gleichung 0 ist, dann auch die andere. \square

Bemerkung. Stellt man sich das Potential f als Höhenfunktion über U vor, so kann man (10) wie folgt deuten. Der Weg $(c, f \circ c)$ im Graphen hat einen Geschwindigkeitsvektor $(c', (f \circ c)')$, dessen Vertikalkomponente $(f \circ c)' = \langle \text{grad } f, c' \rangle$ unser Integrand ist. Also haben wir nachgerechnet, dass die aufintegrierte Vertikalgeschwindigkeit gerade die Höhendifferenz des Weges ist.

2.5. Einfach zusammenhängende Gebiete. Für die Existenz eines Potentials wird entscheidend sein, ob das Gebiet, auf dem das Vektorfeld gegeben ist, "Löcher" aufweist:

Definition. (i) Sei U offen, und $c: [a, b] \rightarrow U$ eine Schleife, die stückweise C^1 sei. Dann heißt c in U *zusammenziehbar* [contractible], wenn es eine stetige Abbildung $h: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ gibt und einen Punkt $p \in U$ mit

$$(15) \quad h(0, t) = c(t), \quad h(1, t) \equiv p, \quad h(s, a) = h(s, b) \text{ für alle } s \in [0, 1].$$

Man nennt dann $h(s, t)$ auch eine *Homotopie* auf p , und c eine *nullhomotope Schleife*. Wir fordern zusätzlich, dass h in s stetig differenzierbar ist, und dass $\frac{\partial h}{\partial t}$ und $\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}$ nach Einschränkung auf Mengen der Form $[0, 1] \times [t_i, t_{i+1}]$ stetig sind, wobei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

(ii) Eine offene Menge U heißt *einfach zusammenhängend* [simply connected], wenn sie erstens zusammenhängend ist (U Gebiet) und zweitens jede Schleife zusammenziehbar ist.

Bemerkungen. 1. Die dritte Bedingung in (15) bedeutet, dass für jedes s die Abbildung $t \mapsto h(s, t)$ eine Schleife ist.

2. Speziell kann man als "Zielpunkt" p der Homotopie und als Punkte $h(s, a) = h(s, b)$ gerade den Punkt $c(0) = c(1)$ wählen. Tatsächlich würde es keinen Unterschied machen, dies in der Definition zu verlangen.

3. Die zusätzliche Forderung ist eigentlich unnötig. Sie vereinfacht aber den Beweis und ist in allen Fällen, die wir brauchen, erfüllt. Im allgemeinen kann man sie durch geeignete Glättung einer stetigen Homotopie herstellen.

4. Man definiert allgemeiner auch Homotopien zwischen zwei Kurven, die stetig ineinander deformierbar sind.

- Beispiele.* 1. $U = \mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend, denn jede Schleife c ist in \mathbb{R}^n zusammenziehbar: Die Homotopie $h(s, t) = (1 - s)c(t)$ schrumpft c auf den Ursprung.
2. Der Einheitskreis \mathbb{S}^1 ist nicht in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zusammenziehbar. Das ist zwar intuitiv klar, ein direkter Beweis ist aber nicht einfach. Allerdings folgt dies aus dem Beispiel aus Abschnitt 2.6 und Korollar 13.
3. Die Kugelschale $B_R(0) \setminus \overline{B_r(0)}$ für $R > r > 0$ ist einfach zusammenhängend für $n \geq 3$. Für $n = 2$ nennt man diese Menge *Kreisring* [annulus] $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, sie ist nicht einfach zusammenhängend, sondern, wie man manchmal sagt, *zweifach zusammenhängend*. (Und für $n = 1$?)

Wir erwähnen nun zwei spezielle Typen von Mengen, die man in Funktionentheorie und Analysis gern benutzt. Dazu sei $\overline{xy} := \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}$ die Verbindungsstrecke zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definition. (i) Eine Menge $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in Y$ gilt: $\overline{xy} \subset Y$. (ii) Eine Menge $Y \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* [star shaped], wenn es ein *Zentrum* $z \in Y$ gibt, so dass für alle $x \in Y$ gilt: $\overline{xz} \subset Y$. Sternförmige Gebiete heißen auch *Sterngebiete*.

Beispiel. Die *geschlitzte Ebene* $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ ist sternförmig bezüglich des Zentrums $(-1, 0)$.

Sternförmig ist der allgemeinere Begriff, denn eine konvexe Menge ist sternförmig bezüglich jedes Punktes. Jede konvexe und jede sternförmige Menge ist zusammenhängend.

Satz 11. *Konvexe und sternförmige offene Mengen sind einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei z ein Zentrum der sternförmigen Menge Y , bzw. z beliebig falls Y konvex ist. Dann ist

$$h(s, t) := (1 - s)c(t) + sz \in \overline{zc(t)} \subset Y$$

eine Homotopie der Schleife auf z . □

6. Vorlesung, Donnerstag 22.11.07 _____

2.6. Die Symmetrie von J_X als Integrabilitätsbedingung. Wir kehren zu unserem Problem zurück: Hat jedes Vektorfeld X , für das die notwendige Bedingung (8) gilt, ein Potential f ? Das folgende Beispiel zeigt, dass wir noch weitere Forderungen stellen müssen.

Beispiel. Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

a) Auf dem Schlitzgebiet $S := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ besitzt X ein Potential, und zwar den *Polarwinkel* $f: S \rightarrow (0, 2\pi)$. Dieser ist definiert durch $f(z) = \arg z$, wobei sich \arg durch Fallunterscheidung definieren läßt, z.B. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ für $x, y > 0$ (siehe Analysis 1). Der Graph von f sieht wie eine (glatte) Wendeltreppe aus. Wir behaupten $\text{grad } f = X$. Dies kann man durch direkte Rechnung bestätigen, auch wenn es wegen der Fallunterscheidungen in der Definition von f etwas mühsam ist. Man kann es aber auch daraus schließen, dass erstens X senkrecht auf den Niveaumengen von f steht, und zweitens $\|\text{grad } f(x, y)\|$ proportional zu $\frac{1}{\|(x, y)\|}$ ist, was übereinstimmt mit $\|X\|$.

b) Wir behaupten, dass X sogar auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ rotationsfrei ist. Dies kann man entweder direkt nachrechnen. Oder man folgert mit Satz 7 aus a), dass $\text{rot } X = 0$ auf S ; wegen der Stetigkeit von $\text{rot } X$ folgt die Behauptung.

c) Aber X hat kein Potential auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: Umrundet man beispielsweise auf dem Kreis \mathbb{S}^1 den Ursprung, so ist X gerade der Tangentialvektor, und der Wert des Potentials f müßte um $\int_0^{2\pi} \langle X \circ c, c' \rangle dt = 2\pi$ wachsen (die Wendeltreppe steigt!). Also läßt sich f nicht einmal auf \mathbb{S}^1 definieren.

Unser konkretes Ergebnis ist: Der Polarwinkel ist nur lokal stetig definierbar (maximal auf S). Dennoch hat ein global auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiertes Gradientenvektorfeld. Integrieren wir dieses Vektorfeld längs Kurven auf, so erhalten wir keine global definierte Funktion. Kurz gesagt: Differentielle Daten (Vektorfelder) können global definiert sein, jedoch kann es sein, dass sie Aufintegrieren (zum Potential) nur lokal gestatten, nicht global.

Wir wollen nun die folgende Aussage beweisen:

Satz 12. *Sei X ein C^1 -Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$, dessen Jacobimatrix J_X symmetrisch sei. Ist c eine stückweise C^1 -Schleife in U , die nullhomotop ist, so verschwindet das Kurvenintegral über X , d.h. es gilt $\int_c X \cdot ds = 0$.*

Falls U einfach zusammenhängend ist, läßt sich diese Aussage auf eine beliebige Schleife in U anwenden. Nach Satz 10 bedeutet dies, dass X ein Potential hat. Daher ist im einfach zusammenhängenden Fall Satz 7 umkehrbar. Dies formulieren wir nun als unser Hauptergebnis.

Korollar 13. *Sei U einfach zusammenhängend. Dann hat das Vektorfeld $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ genau dann eine symmetrische Jacobimatrix J_X (d.h. (8) gilt), wenn (11) ein Potential f von X definiert.*

Bemerkung. Auch auf nicht einfach zusammenhängenden Gebieten können Vektorfelder ein Potential besitzen, z.B. Gradientenfelder eines Potentials.

Beweis des Satzes. Wir betrachten eine Homotopie der Schleife auf p ,

$$h: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U, \quad (s, t) \mapsto h(s, t), \quad \text{mit } h(0, t) = c(t) \text{ und } h(1, t) \equiv p.$$

Dabei nehmen wir zunächst an, dass c und h stetig partial differenzierbar sind.

Wir werden zeigen

$$(16) \quad \int_c X \cdot ds = \int_0^1 \int_a^b \left\langle J_X(h) \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle - \left\langle J_X(h) \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle dt ds,$$

wobei wir kurz h für $h(s, t)$ geschrieben haben; entsprechend im Rest des Beweises. Nach Voraussetzung ist J_X in jedem Punkt $h(s, t)$ eine symmetrische Matrix. Daher ist $\langle J_X v, w \rangle = \langle v, J_X w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Der ausgerechnete Integrand verschwindet also punktweise, und aus (16) folgt das gewünschte Ergebnis $\int_c X \cdot ds = 0$.

Wir betrachten zuerst die Schleifen $t \mapsto \tau_s(t) := h(s, t)$; die Anfangsschleife $\tau_0 = c$ schrumpft auf die Endschleife $\tau_1 \equiv p$. Wir interessieren uns nun dafür, wie die Schleifenintegrale $\int_{\tau_s} X \cdot ds$ vom Parameter s abhängen, d.h. für die Funktion $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(s) := \int_{\tau_s} X \cdot ds = \int_a^b \left\langle X(\tau_s(t)), \tau'_s(t) \right\rangle dt.$$

Das Kurvenintegral über die konstante Endschleife τ_1 verschwindet, d.h. $g(1) = 0$. Daher können wir die linke Seite von (16) schreiben als

$$(17) \quad \int_c X \cdot ds = g(0) = -(g(1) - g(0)) \stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} - \int_0^1 g'(s) ds$$

Der Integrand rechnet sich aus zu

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{d}{ds} \int_a^b \left\langle X(\tau_s(t)), \tau'_s(t) \right\rangle dt \stackrel{\text{Diff. unt. Int.}}{=} \int_a^b \frac{d}{ds} \left\langle X(\tau_s(t)), \tau'_s(t) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle \frac{d}{ds} X(\tau_s(t)), \tau'_s(t) \right\rangle + \left\langle X(\tau_s(t)), \frac{d}{ds} \tau'_s(t) \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass Skalarprodukte nach der Produktregel differenziert werden. Wenn wir im ersten Term die Kettenregel anwenden, erhalten wir:

$$(18) \quad - \int_0^1 g'(s) ds = - \int_0^1 \int_a^b \left\langle J_X(h) \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle dt ds - \int_0^1 \int_a^b \left\langle X(h), \frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} \right\rangle dt ds$$

Mit dem ersten Summanden von (18), sind wir bereits am Ziel, denn dies ist gerade das zweite Integral von (16)! Es bleibt, den zweiten Summanden in (18) umzuschreiben.

Dazu sehen wir uns nun die Bahn von Punkten $c(t)$ unter der Homotopie h an, d.h. wir betrachten nunmehr die s -Kurven $s \mapsto \sigma_t(s) := h(s, t)$. Wegen $h(s, a) = h(s, b)$ stimmen

die Anfangs- und Endbahn, $\sigma_a(s)$ und $\sigma_b(s)$, überein. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\sigma_b} X \cdot ds - \int_{\sigma_a} X \cdot ds \stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \int_{\sigma_t} X \cdot ds \right) dt \\
&\stackrel{\text{Diff. unt. Int.}}{=} \int_a^b \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} \langle X(\sigma_t(s)), \sigma_t'(s) \rangle \right) ds dt \\
&\stackrel{\text{Prod.regel}}{=} \int_a^b \int_0^1 \left\langle \frac{d}{dt} X(h), \frac{\partial}{\partial s} h \right\rangle + \left\langle X(h), \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h \right\rangle ds dt \\
&\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b \int_0^1 \left\langle J_X(h) \frac{\partial}{\partial t} h, \frac{\partial}{\partial s} h \right\rangle ds dt + \int_a^b \int_0^1 \left\langle X(h), \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h \right\rangle ds dt.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis formen wir um mit dem Satz von Fubini und dem Satz von Schwarz:

$$(19) \quad - \int_0^1 \int_a^b \left\langle X(h), \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} h \right\rangle dt ds = \int_0^1 \int_a^b \left\langle J_X(h) \frac{\partial}{\partial t} h, \frac{\partial}{\partial s} h \right\rangle dt ds$$

Der zweite Summanden von (18) ist also der erste Summand von (16). Das zeigt (16).

Sind c und $t \mapsto h(s, t)$ nur stückweise C^1 , so muss man die im Beweis benutzten Integrationen über t nur als Summen deuten. \square

Zwei Bemerkungen zur Verständnis des vorstehenden Beweis:

1. Man kann (16) so verstehen, dass das Schleifenintegral links mit einem Flächenintegral über die Rotationsbedingung rechts ausgedrückt wird. Dabei wird die Rotationsbedingung nur in bestimmten Richtungen ausgewertet, und über die von der Homotopie h überstrichene Fläche integriert.

2. Wir mussten die Bedingung für ∂X benutzen, um eine Aussage für $\int X$ zu erhalten. Daher haben wir $\int X$ mit dem Hauptsatz als Integral über eine Ableitung geschrieben. Dieser Ansatz lieferte (18). Der zweite Term darin wird in Wahrheit durch partielle Integration umgewandelt, d.h. wir schreiben gewissermaßen $\int fg = \int f'g + \int fg'$, wobei wegen gleicher Randwerte die linke Seite sogar verschwindet. Dies macht aus dem Term $\int \langle X, \partial^2 h \rangle$ einen Term vom gewünschten Typ $\int \langle \partial X, \partial h \rangle$.

Beispiel. Gegeben sei das Vektorfeld

$$X(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y - x \end{pmatrix} \quad \text{auf } \mathbb{R}^2,$$

das rotationsfrei ist: $\partial_2 X_1 = -1 = \partial_1 X_2$. Also kann man nach dem Korollar ein Potential $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } f = X$ finden. Wir wollen dies nun durch Integration angeben. Es ist durch den Wert an einem einzigen Punkt eindeutig bestimmt. Wir setzen z.B. $f(0, 0) := 0$.

In einem ersten Schritt berechnen wir $f(x, 0)$ gemäß (11). Es sei zunächst $x > 0$. Wir betrachten für $t \in [0, x]$ die Kurve $c(t) = (t, 0)$. Sie erfüllt $c'(t) = (1, 0)$ und daher $\langle X(c(t)), c'(t) \rangle =$

$X_1(c(t)) = t^2$. Also ist

$$f(x, 0) = \int_c X \cdot ds = \int_0^x \langle X(c(t)), c'(t) \rangle dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^x = \frac{1}{3} x^3.$$

Für $x < 0$ erhält man das gleiche Ergebnis.

Im zweiten Schritt berechnen wir $f(x, y)$, wiederum zunächst für $y > 0$. Dazu verbinden wir $(x, 0)$ mit (x, y) durch die Kurve $c(t) := (x, t)$, die für $t \in [0, y]$ definiert sei. Diese Kurve erfüllt $c'(t) = (0, 1)$, und daher $\langle X(c(t)), c'(t) \rangle = X_2(c(t)) = t - x$. Also ist

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, 0) + \int_c X \cdot ds = f(x, 0) + \int_0^y \langle X(c(t)), c'(t) \rangle dt = f(x, 0) + \int_0^y t - x dt \\ &= \frac{1}{3} x^3 + \left[\frac{1}{2} t^2 - tx \right]_0^y = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} y^2 - xy \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass tatsächlich $\text{grad } f = (x^2 - y, y - x)$ ist, wie verlangt.

Natürlich hätten wir das gleiche Ergebnis auch in einem Schritt erhalten können, z.B. durch Wahl des Weges $c(t) := t(x, y)$, der für $t \in [0, 1]$ die Punkte $(0, 0)$ und (x, y) verbindet. Berechnen Sie dies zur Übung.

Bemerkungen. 1. Ist J_X nicht symmetrisch, so kann man aus (16) ablesen, wie man eine Schleife c zu wählen hat, so dass das Kurvenintegral nicht verschwindet (wie?).

2. Gewöhnliche Differentialgleichungen werden durch Aufintegrieren gelöst. Man arbeitet dabei über \mathbb{R} , und hat daher kein Problem der Wegabhängigkeit. Kann man aber eine partielle Differentialgleichung durch Kurvenintegrale aufintegrieren, so nennt man eine Bedingung, die die Lösbarkeit garantiert, eine *Integrabilitätsbedingung*. In diesem Sinn ist für die Gleichung $\text{grad } f = X$ die Rotationsfreiheit (8) gerade die Integrabilitätsbedingung.

Wir halten abschließend eine Konsequenz des Satzes fest, die auf beliebigen Gebieten gilt: Ein Vektorfeld X auf U erfüllt genau dann die Integrabilitätsbedingung (8), wenn X *lokal* ein Potential besitzt. Letzteres bedeutet, dass es für jeden Punkt p eine Umgebung $U(p) \subset U$ gibt, so dass X auf $U(p)$ ein Potential besitzt. Offenbar kann man für $U(p)$ jede Umgebung nehmen, die einfach zusammenhängend ist.

2.7. Ausblick: Pfaffsche Formen. Es gibt einen natürlichen Abstraktionsschritt, den ich Ihnen bisher vorenthalten habe, um die Sache nicht noch komplizierter zu machen.

Im Kurvenintegral steht ein Skalarprodukt. Das Skalarprodukt macht für jeden Zeitpunkt t aus dem Vektor $c'(t)$ die reelle Zahl $\langle X \circ c, c'(t) \rangle$, die man aufintegrieren kann. Weil das Vektorfeld X nicht explizit eingeht, sondern nur über das Skalarprodukt, reicht es aus, in jedem Punkt $c(t)$ über eine Linearform zu verfügen,

$$\omega_{c(t)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad c'(t) \mapsto \omega_{c(t)}(c'(t)).$$

Natürlich ist ein Vektorfeld X eine spezielle Art, eine solche Linearform zu definieren, denn damit kann man setzen

$$\omega_{c(t)}(\cdot) := \langle X(c(t)), \cdot \rangle.$$

Fixieren wir einen Moment den Punkt $c(t)$. In der linearen Algebra bezeichnet man den Raum der Linearformen auf einem Vektorraum V als den *Dualraum* V^* . Aus der linearen Algebra wissen wir, dass in \mathbb{R}^n oder jedem anderen endlich-dimensionalen Vektorraum V der Dualraum V^* sogar isomorph zu V ist, denn man kann bezüglich eines festen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ setzen:

$$V \rightarrow V^*, \quad X \mapsto \omega(\cdot) := \langle X, \cdot \rangle$$

In Analysis und Physik genügen Vektoren allein nicht, sondern man benötigt immer die stetig oder differenzierbar von einem Gebiet abhängigen *Vektorfelder*, $X: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V$, $p \mapsto X(p)$. Genauso kann man auch “Linearform-Felder” betrachten, also eine stetige oder differenzierbare Zuordnung von Linearformen

$$U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V^* = (\mathbb{R}^n)^*, \quad p \mapsto \omega_p.$$

Diese Felder nennt man *Pfaffsche Formen* [*Pfaffian forms*]. Als ein Spezialfall von sogenannten *Differentialformen* heißen sie auch *Einsformen*. Eine Pfaffsche Form gegeben, wird ein (verallgemeinertes) Kurvenintegral erklärt durch

$$\int_c \omega := \int_a^b \omega_{c(t)}(c'(t)) dt.$$

Das Potentialproblem kann man in die Sprache der Formen übersetzen: Man will wissen, ob es eine Funktion f gibt, für die $\omega = df$ gilt, wobei d ein geeigneter Ableitungsoperator ist (die Form ω heißt dann *exakt*). Bitte sehen Sie sich Königsberger, Analysis 2, Kapitel 3, an, um die Inhalte unseres Kapitels in die Sprache der Differentialformen übersetzt zu finden.

Bemerkung. Tatsächlich kommen Pfaffsche Formen auch in der Physik vor. Ein Kraftfeld $F(p)$ stellt man sich gewöhnlich als Vektorfeld vor. Allerdings kennt man in Wahrheit nur die Arbeit längs von Kurvenintegralen; nur sie kann man tatsächlich messen. Daher ist die Kraft in Wahrheit eine Pfaffsche Form ω . Den Wert dieser Pfaffschen Form an einem Punkt erhält man durch Grenzübergang: Betrachtet man immer kürzere Wege, die von einem Punkt p in Richtung v ausgehen, so kann man über den Differenzenquotienten der Wegeintegrale den Wert $\omega_p(v)$ bestimmen; in physikalischer Sprechweise ist v ein infinitesimaler Verschiebevektor. Erst wenn man Koordinaten einführt, und dazu das kanonische Skalarprodukt betrachtet, kann man die Kraft ω_p als ein Vektorfeld F interpretieren, $\omega_p(v) = \langle F(p), v \rangle$.

7. Vorlesung, Donnerstag 29.11.07

3. INTEGRALFORMELN FÜR HOLOMORPHE FUNKTIONEN

Wir wenden die reelle Theorie nun auf den komplexen Fall an. Das wichtigste Ergebnis wird eine Integralformel sein, aus der wir im nächsten Kapitel alle wichtigen Eigenschaften holomorpher Funktionen folgern werden. – Wenn wir im folgenden $U \subset \mathbb{C}$ schreiben, meinen wir immer eine offene Menge.

3.1. Komplexe Kurvenintegrale. Hat man das (Riemann-)Integral für reellwertige Funktionen bereits erklärt, so kann man es für komplexwertige Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, die stückweise stetig sind, folgendermaßen definieren (vgl. Analysis 1):

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt$$

Dieses Integral ist \mathbb{C} -linear. Eine Eigenschaft des Integrals, die im Komplexen etwas trickreicher als im Reellen ist, ist die Abschätzung $|\int_a^b f(t) dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt$, die wir in den Übungen gezeigt haben. Daraus folgt natürlich wie im Reellen die Standard-Abschätzung $|\int_a^b f(t) dt| \leq |b - a| \|f(t)\|_\infty$.

Auch für komplexwertige Funktionen gilt der Hauptsatz:

Satz 14. Sind $f, F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und ist F Stammfunktion [primitive, antiderivative], d.h. F ist stetig differenzierbar (Re F sowie Im F reell diffbar) mit $F' = f$, so gilt

$$(20) \quad \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Dieser Satz folgt aus seiner reellen Version durch getrennte Betrachtung von Real- und Imaginärteil. Der Hauptsatz gestattet die einfache Berechnung vieler Integrale:

Beispiele. 1. $\int_a^b e^{it} dt = \frac{1}{i} e^{it} \Big|_a^b$

2. Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ hat $f(z) := z^n$ die Stammfunktion $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Dabei ist der Definitionsbereich von f, F die ganze Ebene \mathbb{C} falls $n \in \mathbb{N}_0$, und $U := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ falls $n \leq -2$.

Aus dem Hauptsatz folgen wiederum die Integrationsregeln (welche sind das?).

Anstelle des Skalarproduktes wollen wir nun das komplexe Produkt von \mathbb{C} einsetzen, um ein neues Kurvenintegral zu definieren, dessen Werte komplex sind:

Definition. Ist $c: [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ eine C^1 -Kurve und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so ist das *komplexe Kurvenintegral* erklärt durch

$$\int_c f(z) dz := \int_a^b f(c(t))c'(t) dt,$$

bzw. für c eine stückweise C^1 -Kurve $\int_c f(z) dz := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(c(t))c'(t) dt$.

Das folgende Beispiel ist so fundamental für die Funktionentheorie, dass wir es als Satz formulieren:

Satz 15. Es sei $c_r: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$, die Parametrisierung eines Kreises vom Radius $r > 0$. Dann gilt

$$(21) \quad \int_{c_r} z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1, \\ 0 & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}. \end{cases}$$

Beweis. Wir berechnen zuerst das Kurvenintegral von $\frac{1}{z}$:

$$\int_{c_r} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{c_r(t)} c_r'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

Andererseits gilt für $n \neq -1$ (und warum nur dafür?):

$$\int_{c_r} z^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} ire^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \frac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad \square$$

Wir wollen nun das komplexe Kurvenintegral durch reelle Kurvenintegrale ausdrücken, um die Ergebnisse des letzten Kapitels anwenden zu können.

Lemma 16. Sei $c: [a, b] \rightarrow U$ stückweise C^1 und $f = u + iv: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$(22) \quad \int_c f(z) dz = \int_c \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot ds + i \int_c \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot ds.$$

Beweis. Wir trennen Real- und Imaginärteil des Integrals:

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &= \int_a^b f(c(t))c'(t) dt = \int_a^b \begin{pmatrix} u(c(t)) \\ v(c(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} c'(t) \\ \operatorname{Im} c'(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_a^b (u \circ c) \operatorname{Re} c' - (v \circ c) \operatorname{Im} c' dt + i \int_a^b (u \circ c) \operatorname{Im} c' + (v \circ c) \operatorname{Re} c' dt \\ &= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} u \circ c \\ -v \circ c \end{pmatrix}, c' \right\rangle dt + i \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} v \circ c \\ u \circ c \end{pmatrix}, c' \right\rangle dt \end{aligned}$$

In den letzten beiden Zeilen ist das Argument t fortgelassen. □

Die Darstellung (22) erlaubt uns, folgende Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals vom reellen Fall zu zitieren:

- \mathbb{C} -Linearität: $\int_c \lambda f(z) + g(z) dz = \lambda \int_c f(z) dz + \int_c g(z) dz$.
- Invarianz unter orientierungstreuen Umparametrisierungen: $\int_{c \circ \varphi} f(z) dz = \int_c f(z) dz$.
- Vorzeichenänderung unter Inversion: $\int_{c^-} f(z) dz = - \int_c f(z) dz$.
- Additivität unter Summen: $\int_{c_1+c_2} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz$.

Schließlich haben wir auch eine Längenabschätzung. Dazu sei die *Länge* einer stückweise C^1 -Kurve $c: [a, b] \rightarrow U$ erklärt durch

$$L(c) := \int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(\operatorname{Re} c'(t))^2 + (\operatorname{Im} c'(t))^2} dt,$$

bzw. durch die entsprechende Summe. Wenn $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, gilt (Übung):

$$(23) \quad \left| \int_c f(z) dz \right| \leq L(c) \cdot \max_{z \in \operatorname{Spur} c} |f(z)|.$$

3.2. Cauchyscher Integralsatz. Wir können nun die reelle Theorie auf komplexe Kurvenintegrale anwenden.

Satz 17. *Eine Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{C})$ ist genau dann, wenn gilt*

$$(24) \quad \int_c f(z) dz = 0 \quad \text{für jede nullhomotope stückweise } C^1\text{-Schleife } c \text{ in } U.$$

Beweis. “ \Rightarrow ”: Wir betrachten die beiden Vektorfelder auf U aus Darstellung (22),

$$(25) \quad X := \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f \\ -\operatorname{Im} f \end{pmatrix} = \bar{f} \quad \text{und} \quad Y := \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Im} f \\ \operatorname{Re} f \end{pmatrix} = i\bar{f}.$$

Wenn f holomorph ist, sind die Cauchy-Riemann-Gleichungen (6) erfüllt, und deshalb gilt

$$(26) \quad \partial_1 X_2 - \partial_2 X_1 = -v_x - u_y = 0 \quad \text{und} \quad \partial_1 Y_2 - \partial_2 Y_1 = u_x - v_y = 0.$$

D.h. die Felder X und Y genügen der Integrabilitätsbedingung (8) – sie sind rotationsfrei. Nach Satz 12 folgt daraus das Verschwinden der Schleifenintegrale von X und Y , und damit gilt $\int_c f dz = \int_c X \cdot ds + i \int_c Y \cdot ds = 0 + 0$.

“ \Leftarrow ”: Sei $z \in U$ beliebig und $U_0 \subset U$ eine Umgebung von z , die einfach zusammenhängend ist. Für jede Schleife in U_0 verschwindet das Kurvenintegral. Nach Satz 10 besitzt $X + iY = \bar{f} + i\bar{f}$ ein Potential auf U_0 , so dass nach Satz 7 X und Y rotationsfrei sind. Nach (26) gelten die Cauchy-Riemann-Gleichungen in z . Also ist f holomorph (Satz 3). \square

Wenn U einfach zusammenhängend ist, kann man den Cauchyschen Integralsatz auf jede Schleife anwenden. Kombinieren wir Korollar 13 mit Satz 10, so erhalten wir daher:

Satz 18. Sei U einfach zusammenhängendes Gebiet. Für eine Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{C})$ sind dann äquivalent:

(i) f holomorph auf U .

(ii) Für jede stückweise C^1 -Schleife c in U gilt $\int_c f(z) dz = 0$.

(iii) Sei $p \in U$ und $c: [a, b] \rightarrow U$ eine stückweise C^1 -Kurve mit $c(a) = p$, $c(b) = z$. Dann hängt das Kurvenintegral $F(z) := \int_c f(\zeta) d\zeta$ allein vom Endpunkt z der Kurve c ab.

(iv) Die Funktion f besitzt eine Stammfunktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$.

Aus dem Zusammenhang von U folgt wieder, dass jede andere Stammfunktion von f sich von F allein um Addition einer Konstanten unterscheidet.

Beispiele. 1. Die Funktion $\frac{1}{z}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph. Sie hat das Schleifenintegral $\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$. Aus dem Satz folgt, dass $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend sein kann. Weiterhin kann $\frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ haben. Tatsächlich kann der komplexe Logarithmus nicht auf dieser Menge erklärt werden, sondern nur auf Schlitzgebieten.

2. Höhere Potenzen z^{-n} für $n \geq 2$ sind zwar auch nur auf dem nicht einfach zusammenhängenden Gebiet $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph, trotzdem gelten alle Aussagen.

3. Die stetige Funktion $|z|$ besitzt keine Stammfunktion (Übung).

Beweis. (i) \Leftrightarrow (ii) ist der Cauchysche Integralsatz, und (ii) \Leftrightarrow (iii) gilt wie im reellen Fall.

“(iii) \Rightarrow (iv)”: Betrachten wir die Kurvenintegrale über $X + iY$ aus (25), so folgt aus Satz 10, dass $F = U + iV$ erfüllt

$$\text{grad } U = X \quad \text{und} \quad \text{grad } V = Y \quad \Rightarrow \quad J_F = \begin{pmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

Also erfüllt F die Cauchy-Riemann-Gleichungen. Laut (7) ist F Stammfunktion von f :

$$F' = U_x + iV_x = u + iv = f.$$

(Alternativ kann man F' auch als komplexen Differenzenquotienten $\frac{1}{h}(F(z+h) - F(z))$ berechnen, wobei man das Kurvenintegral über die Strecke $\overline{z(z+h)}$ berechnet. Die Rechnung ist analog zu (13).)

(iv) \Rightarrow (iii): Wir rechnen wie im reellen Fall (10) nach, wobei wir diesmal die komplexe Version der Kettenregel benutzen:

$$\int_c f(z) dz = \int_c F'(z) dz = \int_a^b F'(c(t))c'(t) dt = \int_a^b (F \circ c)'(t) dt = F(c(b)) - F(c(a)) \quad \square$$

8. Vorlesung, Donnerstag 6.12.07

Bemerkungen. 1. In der Situation des Satzes ist das Wegeintegral kurvenunabhängig und man schreibt daher manchmal auch $F(z) = \int_p^z f(\zeta) d\zeta$, analog zum Reellen.

2. Auch in der Situation von Satz 17 hat man weitere Äquivalenzen, ähnlich zu Satz 18: Als drittes würde man sagen, dass für je zwei in U homotope Kurven das Kurvenintegral denselben Wert ergibt und als viertes, dass die Funktion f lokal Stammfunktionen hat. Dabei besitzt f eine *lokale Stammfunktion*, wenn jeder Punkt $z \in U$ eine Umgebung hat, auf der eine Stammfunktion existiert.

3.3. Cauchysche Integralformeln. Im folgenden werden wir oft über die Ränder von Gebieten U integrieren, wollen aber nicht jedes Mal die parametrisierenden Kurven explizit angeben müssen. Wir denken dabei an den Fall, dass der Rand von U nicht zusammenhängend ist, wie beispielsweise bei Kreisringen. Wir setzen

$$\int_{\partial U} f(z) dz := \int_{c_1} f(z) dz + \dots + \int_{c_n} f(z) dz.$$

Wir treffen dazu folgende Vereinbarungen, die dies wohldefiniert machen:

1. Es gilt $\partial U = \text{Spur}(c_1) \cup \dots \cup \text{Spur}(c_n)$, wobei c_1, \dots, c_n stückweise C^1 -Schleifen sind.
2. Der Durchlaufsinne ist so gewählt, dass das Gebiet *links* jeder Schleife liegt, d.h. der Tangentialvektor von c_k , gedreht um $+90$ Grad, also der Vektor $ic'_k(t)$, soll innere Normale des Gebietes sein.
3. Abgesehen von ihren Anfangs- und Endpunkten sollen die Schleifen c_1, \dots, c_n den Rand injektiv parametrisieren; insbesondere soll jede Schleife die betreffende Randkomponente nur einmal durchlaufen. Die Wahl des Anfangs- und Endpunktes der Schleifen c_k braucht nicht spezifiziert zu werden.

Beispielsweise können wir nun $\partial B_r(b)$ für die Kreisparametrisierung $c(t) = b + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ schreiben.

Wir benötigen noch eine weitere Notation: Ist $A \subset B \subset \mathbb{C}$ (oder $\subset \mathbb{R}^n$), so sagen wir A ist *kompakt enthalten* in B , geschrieben $A \subset\subset B$, falls \bar{A} kompakt ist und $\bar{A} \subset B$ gilt.

Wir betrachten nun ein Gebiet, das von zwei nicht unbedingt konzentrischen Kreisen berandet wird; man könnte sogar zwei beliebige Schleifen nehmen. Hat man eine Funktion, die holomorph auf diesem Gebiet ist, so stimmen die beiden Kurvenintegrale von f überein:

Lemma 19. *Es sei $B_r(z) \subset\subset B_R(z)$ und U ein Gebiet mit $\bar{B}_R(z) \setminus B_r(z) \subset\subset U$. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$*

$$\int_{\partial B_R(z)} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial B_r(z)} g(\zeta) d\zeta.$$

Beispiel. Sei $B_R(z)$ eine Kreisscheibe mit $0 \in B_R(z)$. Dann gilt $\int_{\partial B_R(z)} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i$.

Beweis. Wir betrachten einen Strahl von z durch b . Er schneidet das Gebiet $U := B_R(b) \setminus \overline{B_r(z)}$ in einer Strecke γ , die wir z.B. von außen nach innen parametrisieren. Wir denken uns die beiden Kreise so parametrisiert, dass sie an den Endpunkten von γ beginnen bzw. enden. Damit definieren wir die Schleife

$$c := \partial B_R(b) + \gamma + [\partial B_r(z)]^- + \gamma^-.$$

Diese Schleife ist nullhomotop in $U \setminus \{z\}$. Eine mögliche Art, das zu sehen, ist die folgende. Wir können uns vorstellen, dass wir γ^- um z rotieren lassen, bis es wieder mit γ^+ zusammenfällt. Dies verkleinert c auf stetige Weise bis auf die Strecke $\gamma^+ + \gamma^-$. Wir lassen nun noch den Radius des des Innenkreises passend wachsen, so dass sich der radiale Strahl verkürzt, bis er am Ende auf einen Punkt fällt. Dies definiert eine Homotopie mit den geforderten Differenzierbarkeitseigenschaften.

Also gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz (CIS), wie gewünscht:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{CIS}}{=} \int_c g(z) dz = \int_{\partial B_R(b)} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz + \int_{[\partial B_r(z)]^-} g(z) dz + \int_{\gamma^-} g(z) dz \\ &= \int_{\partial B_R(b)} g(z) dz - \int_{\partial B_r(z)} g(z) dz \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\int_{\gamma^-} = -\int_{\gamma}$ benutzt. □

Wir können nun die entscheidende Formel dieses Kapitels angeben, eine Formel, die $f(z)$ durch ein Integral darstellt.

Satz 20 (Cauchysche Integralformel, 1831). *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{B_R(b)} \subset U$. Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(b)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für alle } z \in B_R(b).$$

Eine holomorphe Funktion auf der Kreisscheibe $B_R(b)$ wird also bereits durch ihre Randwerte $\partial B_R(b)$ festgelegt.

Ausgewertet am Mittelpunkt b der Kreisscheibe, lautet die Integralformel

$$(27) \quad f(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(b)} \frac{f(z)}{z - b} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(b + re^{it})}{b + re^{it} - b} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(b + re^{it}) dt.$$

D.h. holomorphe Funktionen haben eine *Mittelwertseigenschaft* [mean value property]. Cauchys Formel kann man als eine unzentrierte Version davon ansehen: Den Faktor $\frac{1}{z-b}$ deutet man dann als einen Gewichtungsfaktor.

Beweis. Wir betrachten eine Kreisscheibe $B_r(z)$ mit $B_r(z) \subset\subset B_R(b) \subset\subset U$. Setzen wir die Funktion

$$g: U \setminus \{z\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

in Lemma 19 ein, so erhalten wir:

$$(28) \quad \int_{\partial B_R(b)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{\text{Lemma}}{=} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

Aber einerseits gilt

$$\int_{\partial B_r(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{\partial B_r(z)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{\text{Satz 15}}{=} 2\pi i f(z),$$

und insbesondere sind in (28) die beiden Terme rechts unabhängig von der Wahl von r . Andererseits folgt aber aus der Längenabschätzung (23),

$$\left| \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq 2\pi \sup \left\{ |f(\zeta) - f(z)| : \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta - z| = r \right\}.$$

Weil f stetig ist, können wir dies durch beliebig kleines $\varepsilon < 0$ abschätzen für $r < \delta = \delta(\varepsilon)$. Also gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

sein, und daher muss das Integral sogar für jedes r verschwinden. Die Behauptung folgt. \square

In vielen Büchern finden Sie diese Formel etwas anders bewiesen: Für f holomorph ist der Differenzenquotient $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ eine für $\zeta \neq z$ holomorphe Funktion, die darüberhinaus stetig fortsetzbar nach $\zeta = z$ ist (durch die Ableitung $f'(z)$). Es ist mit wenig Arbeit möglich, den Cauchyschen Integralsatz noch auf diesen Fall zu erweitern.

Woher kommt die Cauchysche Integralformel? Man kann sie auf die partiellen Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann zurückführen. Diese bedeuten die Rotationsfreiheit der Vektorfelder \bar{f} und $i\bar{f}$. Aber daraus folgt das Verschwinden des Schleifenintegrals, also der Cauchysche Integralsatz. Hieraus wiederum folgt die Cauchysche Integralformel.

Integralformeln kann man nicht nur für die Lösungen der Cauchy-Riemann-Gleichungen gewinnen, sondern auch für die Lösungen einer Reihe weiterer partiellen Differentialgleichungen. Man hat dann entsprechende Folgerungen, wie die des nächsten Abschnitts.

4. EIGENSCHAFTEN HOLOMORPHER FUNKTIONEN

Im vorliegenden Kapitel ziehen wir Konsequenzen aus der Cauchyschen Integralformel. Es besteht aus drei Teilen. Zuerst beweisen wir die Glattheit und Analytizität holomorpher Funktionen. Danach behandeln zwei Abschnitte den Satz von Liouville und den Hauptsatz der Algebra. Schließlich beschäftigen wir uns mit Maximumprinzipien und Offenheit.

4.1. Holomorphe Funktionen sind glatt. Wir wollen die Cauchysche Integralformel differenzieren. Um das zu tun, geben wir die benötigte komplexe Regel an:

Lemma 21 (Leibnizsche Regel). *Sei $f: U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, stetig, $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wenn für jedes feste $t \in [a, b]$ die Funktion $f(z, t)$ holomorph in U ist, und $\frac{\partial f}{\partial z} := f'$ stetig, dann ist $g(z) := \int_a^b f(z, t) dt$ holomorph in U und*

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} dt.$$

Nach (7) gilt für f holomorph $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} f + i \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} f$. Daher ergibt sich der Beweis durch getrennte Anwendung des reellen Satzes auf Real- und Imaginärteil.

Wir wenden die Regel nun an:

Satz 22. *Jede holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist beliebig oft komplex differenzierbar. Genauer gilt für $B_R(z_0) \subset\subset U$ und $n \in \mathbb{N}$*

$$(29) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{für alle } z \in B_R(z_0).$$

Beweis. Der Integrand der Cauchyschen Integralformel, $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, ist auf dem Kreis $\partial B_R(z_0)$ stetig differenzierbar. Die Differentiation der Integralformel mit der Leibnizregel ergibt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Vollständige Induktion liefert die Behauptung für alle n . □

Der Beweis dieser Aussage unterstreicht, wie bedeutend die Existenz einer Integraldarstellung für f ist.

9. Vorlesung, Donnerstag 13.12.07

Bemerkung. Wir können nun zeigen, dass die Annahme $f \in C^1(U, \mathbb{C})$ bei unserer Holomorphiedefinition eigentlich überflüssig war. Nehmen wir also an, f ist nur komplex differenzierbar für alle $z \in U$, aber nicht unbedingt stetig partiell differenzierbar. Sicher

ist dann f stetig, und daher gilt immer noch der Beweis und also auch die Aussage von Satz 17, so dass das Kurvenintegral über f wegunabhängig ist. Ebenso gelten auch die Implikationen $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ von Satz (18), so dass das Kurvenintegral von f lokale Stammfunktionen $F \in C^1(B_r(z), \mathbb{C})$ liefert. Diese Stammfunktionen sind aber selbst holomorph und damit gilt $F \in C^\infty(B_r(z), \mathbb{C})$. Insbesondere folgt $f \in C^1(B_r(z), \mathbb{C})$, d.h. also $f \in C^1(U, \mathbb{C})$.

4.2. Holomorphe Funktionen sind analytisch. Eine analytische Funktion ist eine Funktion, die in der Umgebung jedes Punktes als Potenzreihe dargestellt werden kann:

Definition. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *analytisch*, falls es für alle $b \in U$ ein $r = r(b) > 0$ und Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - b)^n$ für alle $z \in B_r(b)$.

Entsprechend definiert man auch die Analytizität reeller Funktionen $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei gegebenenfalls die Potenzreihe mit Multiindizes geschrieben wird.

Beispiel. Die glatte Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(-1/x^2)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist nicht analytisch. Tatsächlich ist ihre Taylorreihe, genommen im Punkt $x = 0$, konstant 0. Keine andere Reihe kann diese Funktion darstellen, wie aus dem Identitätssatz folgen wird.

Holomorphe Funktionen werden stets durch ihre Taylorreihe dargestellt:

Satz 23 (Cauchy 1831). *Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $B_R(b) \subset U$, so gibt es Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - b)^n \quad \text{für alle } z \in B_R(b).$$

Diese Reihe konvergiert absolut und lokal gleichmäßig. Für ihre Koeffizienten hat man die Darstellung

$$(30) \quad a_n = \frac{f^{(n)}(b)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(b)} \frac{f(z)}{(z - b)^{n+1}} dz,$$

sofern $\overline{B_r(b)} \subset U$.

Beweis. Wenn $f(z) = \sum a_n (z - b)^n$ ist, so folgt $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(b)$. Wir zeigen nun, dass diese Darstellung mit der angegebenen Formel für a_n gilt.

Für ein festes $z \in B_R(b)$ wählen wir ein $0 < r < R$, so dass noch $z \in B_r(b)$. Wegen $\overline{B_r(b)} \subset U$ gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(b)} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Für $\zeta \in \partial B_r(b)$ und $z \in B_r(b)$ gilt $q := \left| \frac{z-b}{\zeta-b} \right| < 1$, so dass die folgende Entwicklung in eine geometrische Reihe konvergiert:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - b - (z - b)} = \frac{1}{\zeta - b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-b}{\zeta-b}} = \frac{1}{\zeta - b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-b}{\zeta-b} \right)^n$$

Offenbar ist $\left| \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{z-b}{\zeta-b} \right)^n \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} q^n = q^N \frac{1}{1-q}$ für alle $N \in \mathbb{N}$, d.h. dieser Ausdruck wird für geeignetes N beliebig klein unabhängig von $\zeta \in \partial B_r(b)$. Daher konvergiert die Reihe gleichmäßig in ζ . Das gleiche gilt auch noch für $\zeta \mapsto f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-b)^n}{(\zeta-b)^{n+1}}$, denn $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta-b}$ ist als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\partial B_r(b)$ beschränkt.

Setzen wir also die gefundene Reihenentwicklung ein, so dürfen wir Integration und Grenzwert vertauschen:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(b)} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-b)^n}{(\zeta-b)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(b)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}} d\zeta \right]}_{=: a_n} (z-b)^n. \quad \square$$

Zusammenfassend gilt damit:

Satz 24. *Folgende Aussagen sind für eine Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{C})$ äquivalent:*

- (i) f ist holomorph,
- (ii) f ist reell differenzierbar und genügt den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen,
- (iii) f besitzt lokale Stammfunktionen,
- (iv) f ist analytisch, d.h. um jedes $z \in U$ lokal durch eine Potenzreihe dargestellt.

4.3. Identitätssatz für analytische Funktionen. Wir erinnern daran, dass a Häufungspunkt [accumulation point] einer Menge X ist, wenn es eine konvergente Folge $x \rightarrow a$ gibt mit $x \in X \setminus \{a\}$.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ (oder $\subset \mathbb{R}^n$) offen. Dann heißt eine Menge $M \subset U$ *diskret* [discrete], wenn M keine Häufungspunkte in U besitzt.

Das bedeutet, dass es für jedes $z \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass $B_r(z) \cap (M \setminus \{z\}) = \emptyset$.

Beispiele. 1. $\mathbb{Z} \subset U = \mathbb{C}$ ist diskret.

2. $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ ist diskret in $U := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, aber nicht diskret in $U := \mathbb{C}$.

3. Die leere und jede endliche Menge ist diskret.

Lemma 25. *Sei U Gebiet, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht identisch 0. Dann ist die Menge der Nullstellen von f diskret in U .*

Beweis. Wir zeigen: Ist die Nullstellenmenge nicht diskret, dann ist $f \equiv 0$. Unter dieser Voraussetzung gibt es einen Häufungspunkt b der Nullstellenmenge, d.h. es existiert eine Folge $(b_n) \in U$, $f(b_n) = 0$, $b_n \rightarrow b$.

Entwickeln wir nun f in eine Potenzreihe um b , also $f(z) = a_0 + a_1(z - b) + a_2(z - b)^2 + \dots$ für $z \in B_r(b)$. Aus der Stetigkeit von f folgt $0 = \lim f(b_n) = f(\lim b_n) = f(b) = a_0$. Nun sehen wir uns die Reihe

$$\frac{f(z)}{z - b} = a_1 + a_2(z - b) + \dots$$

an, die für $z \neq b$ ebenfalls auf $B_r(b) \setminus b$ konvergiert. Weil die Konvergenz für $z = b$ klar ist, ist die rechte Seite sogar stetig in b . Die linke Seite verschwindet aber für $z \rightarrow b$, so dass wie zuvor aus der Stetigkeit folgt $a_1 = 0$. Mit vollständiger Induktion zeigt man entsprechend $a_n = 0$. Die Potenzreihe von f verschwindet also.

Dies bedeutet, dass die Menge $M \subset U$ von Häufungspunkten der Nullstellenmenge offen ist. Jeder Punkt, der nicht in M liegt, hat aber eine Umgebung, in der nur endlich viele Nullstellen von f liegen. Also ist die Menge derjenigen Punkte offen, die kein Häufungspunkt der Nullstellenmenge sind. Also ist $M \subset U$ zugleich offen und abgeschlossen. Weil U Gebiet ist, folgt $M = U$, d.h. $f \equiv 0$. \square

Satz 26 (Identitätssatz). *Seien f, g zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet U . Wenn $\{z \in U: f(z) = g(z)\}$ nicht-diskret ist, so gilt $f \equiv g$.*

Dies folgt sofort, indem man das Lemma auf $f - g$ anwendet. Es zeigt dann $f - g \equiv 0$.

Beispiel. Die beiden Funktionen $f(z) = \sin z$ und $g(z) = \sin \bar{z}$ stimmen auf der nicht-diskreten Teilmenge $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ überein. Aber sie sind nicht gleich, z.B. ist $\sin i = \frac{1}{i} \sinh(-1) \neq \sin \bar{i} = \sin(-i) = \frac{1}{i} \sinh 1$. Daher kann eine der beiden Funktionen nicht holomorph sein, natürlich ist es $\sin \bar{z}$.

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine *analytische Fortsetzung* [analytic continuation] von f , wenn $\tilde{f}|_{\mathbb{R}} = f$ gilt und \tilde{f} analytisch ist. Wir folgern aus dem Identitätssatz, dass eine analytische Fortsetzung eindeutig ist, sofern sie überhaupt existiert. Sie ist dann durch die Fortsetzung der Potenzreihe von f ins Komplexe gegeben. Das Gleiche gilt, wenn man den Definitionsbereich von f durch eine beliebige nicht-diskrete Teilmenge von \mathbb{C} ersetzt.

Die reelle Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ hat Konvergenzradius 1 bei Entwicklung um 0, obwohl sie sich harmlos für $x = \pm 1$ verhält. Ihre Fortsetzung ins Komplexe ist jedoch in den beiden Punkten $\pm i$ nicht mehr definiert. Dies erklärt, warum der Konvergenzradius nicht größer als 1 sein kann. Tatsächlich hat die Funktion genau diesen Konvergenzradius, denn Potenzreihen konvergieren stets auf den maximal möglichen offenen Kreisscheiben:

Satz 27. Wenn $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ Konvergenzradius $R > 0$ hat, so gibt es für kein $\varepsilon > 0$ eine auf $B_{R+\varepsilon}(b)$ holomorphe Funktion f mit $f|_{B_R(b)} = P$.

10. Vorlesung, Donnerstag 20.12.07 _____

Beweis. Würde die holomorphe Fortsetzung existieren, so würde aus Satz 23 folgen, dass f eine Potenzreihenentwicklung um b mit Konvergenzradius $\geq R + \varepsilon$ besäße. Laut Identitätssatz stimmt diese Reihe mit P überein. Also hat P Konvergenzradius mindestens $R + \varepsilon$. Widerspruch. \square

Mit dem Satz kann man in vielen Fällen den Konvergenzradius deutlich einfacher bestimmen als mit der Formel von Cauchy-Hadamard: Der Konvergenzradius ist der maximale Radius, so dass auf dem entsprechenden offenen Ball die Funktion holomorph ist bzw. dorthin holomorph fortsetzbar ist.

4.4. Satz von Liouville. Auch der Satz von Liouville ist eine Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel.

Die reellen Funktionen \sin und \cos sind beschränkt. Allerdings sind ihre analytischen Fortsetzungen unbeschränkt: Tatsächlich gilt auf der imaginären Achse

$$\cos it = \frac{e^{-t} + e^t}{2} = \cosh t, \quad \sin it = \frac{e^{-t} - e^t}{2i} = i \sinh t \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Um zu formulieren, dass dies für jede auf ganz \mathbb{C} definierte Funktion so ist, benutzt man üblicherweise folgenden Begriff:

Definition. Eine *ganze Funktion* [entire function] ist eine auf ganz \mathbb{C} definierte holomorphe Funktion.

Damit können wir nun postulieren:

Satz 28 (Liouville 1847). *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Nach der Integralformel für die Ableitung (29) gilt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad \text{für alle } R > 0.$$

Ist f beschränkt, also $|f| < C$, folgern wir daraus die Abschätzung

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} L(\partial B_R(z)) \frac{C}{R^2} = \frac{C}{R}.$$

Weil f ganz ist, dürfen wir $R \rightarrow \infty$ betrachten, so dass nur $|f'(z)| = 0$ möglich bleibt. Da das für jedes z gilt, muss $f' \equiv 0$ sein, und daher f konstant. \square

Eine Folgerung aus dem Satz ist, dass eine ganze Funktion entweder konstant ist oder ihr Bild dicht in \mathbb{C} liegt (Übung). Tatsächlich sagt der *Kleine Satz von Picard* sogar, dass eine solche Funktion höchstens einen Wert ausläßt; beispielsweise läßt \exp nur die 0 aus.

In der Funktionentheorie werden wir uns daher in der Regel mit Funktionen auf beschränkten Gebieten, oder aber auf ganz \mathbb{C} definierten Funktionen mit Singularitäten befassen.

Eine Folgerung ist: Es gibt keine surjektive holomorphe Abbildung $f: \mathbb{C} \rightarrow B_1$. Geometrisch gesprochen sagt uns das: Es gibt keine winkeltreue Bijektion von \mathbb{R}^2 auf den offenen Einheitskreis, d.h. die *konformen Typen* dieser homöomorphen Mengen sind verschieden. Dagegen sagt der *Riemannscher Abbildungssatz*, dass alle einfach zusammenhängenden Gebiete, die sich von \mathbb{C} um mindestens zwei Punkte unterscheiden, bijektiv und holomorph aufeinander abbildbar sind.

4.5. Hauptsatz der Algebra. Eine schöne Konsequenz des Satzes von Liouville ist ein einfacher Beweis des folgenden Satzes:

Satz 29 (Fundamentalsatz der Algebra, Gauß 1799). *Jedes nicht-konstante Polynom*

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

mit komplexen Koeffizienten a_0, \dots, a_n hat eine Nullstelle b .

Beweis. Wir dürfen $a_n \neq 0$ mit $n > 0$ voraussetzen. Als Vorüberlegung behaupten wir, dass der Term höchster Ordnung das Polynom P für große $|z|$ in folgendem Sinne dominiert: Es existiert $R > 0$ so dass $|P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n$ für $|z| \geq R$. Tatsächlich folgt aus verschärfter und normaler Dreiecksungleichung und für $|z| > R \geq 1$

$$(31) \quad \begin{aligned} \left| \frac{P(z)}{z^n} \right| &= \left| \frac{a_0}{z^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right| \geq |a_n| - \left| \frac{a_0}{z^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| \\ &\geq |a_n| - \frac{1}{|z|} (|a_0| + \dots + |a_{n-1}|) \stackrel{(*)}{\geq} \frac{1}{2}|a_n|; \end{aligned}$$

dabei gilt $(*)$ und damit (31), sofern nur $|z| \geq R := \max\left(1, 2\frac{1}{|a_n|}(|a_0| + \dots + |a_{n-1}|)\right)$.

Wir zeigen nun: Wenn P keine Nullstelle auf \mathbb{C} hat, so ist P konstant. In diesem Fall ist die Funktion $\frac{1}{P}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ erklärt und stetig. Einerseits gilt dann nach (31) auf $\mathbb{C} \setminus B_R$:

$$\left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \frac{2}{|a_n||z|^n} \leq \frac{2}{|a_n|R^n}$$

Andererseits ist auf der kompakten Menge $\overline{B}_R(0)$ die stetige Funktion $\frac{1}{P}$ ebenfalls beschränkt. Daher ist $\frac{1}{P}$ insgesamt beschränkt, und aus dem Satz von Liouville folgt, dass $\frac{1}{P}$ konstant ist, d.h. P selbst ist konstant. \square

Ohne Mühe gewinnen wir aus dem Satz alle n komplexen Nullstellen des Polynoms, wobei wir mit Vielfachheit zählen:

Korollar 30. Für jedes Polynom $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ mit $a_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$, gibt es Zahlen $c, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$(32) \quad P(z) = c(z - b_1) \cdot \dots \cdot (z - b_n).$$

Die b_j sind nicht notwendig verschieden, aber bis auf Reihenfolge eindeutig.

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz existiert eine Nullstelle b_1 von P . Wenn wir P nach Potenzen von $z - b_1$ ordnen, d.h. in eine Darstellung

$$P(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z - b_1) + \dots + \alpha_n(z - b_1)^n$$

bringen, bedeutet das $\alpha_0 = 0$. Wir können daher ausklammern

$$P(z) = (z - b_1)Q(z)$$

wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist. Vollständige Induktion nach n gibt die Behauptung. \square

4.6. Maximumprinzip und Gebietstreue. In der reellen Analysis nimmt die Extremwertdiskussion einen breiten Raum ein. In der komplexen Analysis könnte man sich immerhin noch für die Extrema von $|f|$ interessieren. Jedoch besitzt der Betrag holomorpher Funktionen f keine inneren Maxima:

Satz 31 (Maximumprinzip). *Es sei U Gebiet und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.*

(i) *Hat $|f|$ ein Maximum in einem inneren Punkt $b \in U$, d.h. gilt $|f(z)| \leq |f(b)|$ für alle $z \in U$, so ist f konstant.*

(ii) *Ist U beschränkt und besitzt f eine stetige Fortsetzung auf ∂U , so gilt $|f(z)| \leq \sup_{\partial U} |f|$ für alle $z \in U$.*

Natürlich gilt ein solcher Satz im Reellen nicht, wie $-x^2$ oder die Kosinus-Funktion belegen.

Beweis. (i) Wir betrachten die Menge $M := \{z \in U: |f(z)| = |f(b)|\}$. Weil $|f|$ stetig ist, ist $M \subset U$ abgeschlossen. Wir zeigen nun, dass M auch offen ist. Wegen des Zusammenhangs von U folgt daraus dann $M = U$, d.h. f ist konstant.

Sei $b \in M$. Dann gibt es $R > 0$ mit $B_R \subset\subset U$. Sei $r \in (0, R)$ beliebig. Wir behaupten, dass $|f|$ auf dem Rand jedes Kreises ∂B_r ebenfalls maximal ist, d.h. $\partial B_r \subset M$. Wenn nicht, existiert ein $t_0 \in [0, 2\pi)$ mit $|f(b + re^{it})| < |f(b)|$ für $t = t_0$. Weil f stetig ist, gilt

diese Ungleichung sogar für alle t in einer Umgebung von t_0 und deshalb folgt aus der Mittelwertsformel

$$|f(b)| \stackrel{(27)}{=} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(b + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(b + re^{it})| dt < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(b)| dt = |f(b)|,$$

ein Widerspruch. Also gilt $\partial B_r \subset M$, also $B_R \subset M$, d.h. M ist offen.

(ii) Die stetige Funktion f nimmt auf der kompakten Menge \bar{U} ein Maximum an. Nach (i) wird das Maximum immer am Rand angenommen. \square

Wie man zeigen kann, hat für eine nicht-konstante holomorphe Funktion f der Betrag $|f|$ nur in denjenigen Punkten z innere Minima, für die $f(z) = 0$ gilt (Übung).

Wir kommen nun zu einer tiefer gehenden Aussage. Sei z ein Punkt, in dem die reelle Jacobimatrix df_z den maximalen Rang 2 hat. Laut Umkehrsatz ist f in z lokal invertierbar. Also umfaßt das Bild noch eine volle Umgebung von $f(z)$. Anders als im Reellen ist diese Aussage für eine nicht-konstante holomorphe Funktion sogar ohne die Voraussetzung an den Rang richtig:

Satz 32 (Gebietstreue). *Eine holomorphe Funktion ist entweder lokal konstant oder sie bildet offene Mengen auf offene Mengen ab. Das holomorphe Bild eines Gebiets ist wieder ein Gebiet.*

Beachten Sie, dass dagegen im Reellen gilt $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Aus dem Satz über die Gebietstreue folgt das Maximumprinzip sofort (Übung).

Ist der Rang von df_z nicht 2, so muss er 0 sein. Solche Punkte z sind isoliert und die Taylorreihe beginnt dort mit z^n . Um die n -te Wurzel aus f zu ziehen, weisen wir zuerst nach:

Lemma 33. *Sei U einfach zusammenhängendes Gebiet und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann gilt:*

(i) *Es existiert eine holomorphe Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{g(z)}$.*

(ii) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine holomorphe Funktion $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h^n = f$.*

Beweis. (i) Die Funktion f'/f ist holomorph auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet U . Sie hat daher eine Stammfunktion F , für die gilt

$$\left(\frac{e^F}{f} \right)' = \frac{(e^F)'f - e^F f'}{f^2} = \frac{e^F F' f - e^F f'}{f^2} = 0.$$

Weil U zusammenhängend ist, folgt $e^{F(z)} = C f(z)$ für ein $C \in \mathbb{C}$. Nach Voraussetzung ist $f \neq 0$ und wegen $\exp(w) \neq 0$ auch $C \neq 0$. Weil $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ surjektiv ist, können wir $C = e^c$ schreiben. Wir erhalten dann wie gewünscht $f(z) = e^{F(z)-c}$.

(ii) Setze $h(z) := \exp\left(\frac{1}{n}g(z)\right)$ mit g wie in (i). \square

Wir geben nun einen schönen Beweis des Satz von der Gebietstreue, indem wir holomorphe Abbildungen lokal vollständig analysieren.

Beweis des Satzes. Es reicht, den Fall $0 = b = f(b)$ zu betrachten. Da f analytisch ist, können wir für z klein schreiben

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots = z^n [a_n + a_{n+1} z + \dots] \quad \text{mit } a_n \neq 0, n > 0.$$

Dabei ist $[\dots]$ analytisch mit $[\dots] \neq 0$ in einer geeignet kleinen Kreisscheibe um 0. Nach dem Lemma können wir $[\dots] = (h(z))^n$ schreiben. Das ergibt die Darstellung $f(z) = (zh(z))^n$.

Für die holomorphe Funktion $H(z) := zh(z)$ gilt $f = H^n$, d.h. H ist die n -te Wurzel aus f . Ableiten von H nach der Produktregel gibt $H'(0) = h(0)$. Wegen $(h(0))^n = a_n$ folgt $H'(0) \neq 0$, so dass nach dem Umkehrsatz H alle Werte in einer Umgebung von 0 einmal annimmt. Für jedes kleine w hat also die Gleichung $H(z) = w$ genau eine Lösung z . Jetzt brauchen wir nur noch, dass $\zeta \mapsto \zeta^n = w$ in jeder Umgebung von 0 genau n Lösungen ζ_1, \dots, ζ_n hat. Dies verifiziert man sofort durch Polarkoordinaten, $\zeta_k := \sqrt[n]{|w|} \exp(2\pi k/n)$.

Der Wegzusammenhang des Bildes folgt aus dem Wegzusammenhang des Urbilds. □

Bemerkung. Den Beweis des Satzes können Sie so verstehen: Gilt $f'(0) = 0$, so lautet die Taylorreihe $f(z) = a_n z^n + O(z^{n+1})$. Aber das heißt für r klein, dass das Bild von ∂B_r ungefähr ein n -fach durchlaufener Kreis vom Radius $|a_n| r^n$ ist. Dieser Bildkreis berandet das Bild von B_r . Das Bild hat “keine Löcher” und muss deshalb eine volle Umgebung von 0 enthalten.

Diese Idee wird rigoros, wenn man die Lochlosigkeit des Bildes strikt formuliert. Man braucht dazu eine n -dimensionale Version des Zwischenwertsatzes. Dies leistet der in der Differentialtopologie definierte *Abbildungsgrad*.

Mit einer ganz ähnlichen Argumentation kann man auch verstehen, warum der Hauptsatz der Algebra stimmt. Diesmal betrachtet man statt einer Umgebung von 0 eine Umgebung von ∞ , d.h. die Bilder großer Kreise. Tatsächlich ist das Bild von $\partial B_R(0)$ unter $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ eine Kurve, die für große R immer ähnlicher zu einem n -fach durchlaufenen Kreis vom Radius $|a_n| R^n$ wird. Dieser mehrfach umlaufene Kreis berandet $f(B_R)$. Aber $f(B_R)$ hat “keine Löcher” und muss deshalb wenigstens einmal den Wert 0 im Bild treffen. Ein solcher Punkt ist die gesuchte Nullstelle. Tatsächlich sieht man hieraus sogar, dass man n Nullstellen erhält, denn der n -fach durchlaufene Kreis berandet auch eine n -fache Überlagerung der Kreisscheibe. Lediglich in den endlich vielen Punkten mit $f'(z_0) = 0$, die mehrfachen Nullstellen entsprechen, hat man weniger Urbilder.

Es gibt noch eine Reihe weiterer interessanter Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen, die mit der bis hierher entwickelten Funktionentheorie zugänglich sind. Dazu gehört

das Schwarzsche Lemma und vor allem Kompaktheitsaussagen für Familien holomorpher Abbildungen.

11. Vorlesung, Donnerstag 10.1.08

5. SINGULARITÄTEN: LOKALE THEORIE

Mit dem letzten Abschnitt haben wir die Nullstellen holomorpher Funktionen genauer verstanden. Wir werden nun Unendlichkeitsstellen systematisch untersuchen.

5.1. Der Hebbarkeitssatz und Cauchys Integralformel auf Kreisringen. Für $0 \leq r < R \leq \infty$ sei $A_{r,R}(b) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ der offene *Kreisring* um 0, wir schreiben kurz $A_{r,R}$ für $A_{r,R}(0)$. Der Fall $r = 0$ entspricht der punktierten Kreisscheibe $B_R \setminus \{0\}$ und wird für isolierte Singularitäten wichtig werden.

Man erhält holomorphe Funktionen auf einem Kreisring $A_{r,R}$ beispielsweise durch

$$f(z) := g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right),$$

wobei $g: B_R \rightarrow \mathbb{C}$ und $h: B_{1/r} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph seien. Bevor wir im nächsten Abschnitt zeigen, dass man jede holomorphe Funktion f auf $A_{r,R}$ so zerlegen kann, geben wir vorbereitende Resultate, von denen das erste von allgemeinem Interesse ist:

Satz 34 (Riemannscher Hebbarkeitssatz, 1851). *Sei $f: B_r(b) \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Dann existiert eine analytische Fortsetzung $F: B_r(b) \rightarrow \mathbb{C}$ von f .*

Natürlich gibt es im Reellen viele Funktionen, die nicht differenzierbar fortsetzbar sind; z.B. die Betragsfunktion $|\cdot|$ oder auch die Signumsfunktion, jeweils für $a = 0$.

Beweis. Wir nehmen $b = 0$ an und betrachten die Hilfsfunktion $h: B_r \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$h(z) := \begin{cases} z^2 f(z), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Dann ist h differenzierbar für $z \neq 0$ und sogar auch für $z = 0$, denn

$$h'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z) - h(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0.$$

Also ist h holomorph auf ganz B_r mit $h(0) = h'(0) = 0$. Das heißt h ist analytisch mit Potenzreihe

$$h(z) = a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

Setzen wir also

$$F(z) := a_2 + a_3 z + a_4 z^2 + \dots,$$

so gilt $f(z) = F(z)$ für $z \neq 0$ und F ist als Potenzreihe holomorph auf ganz B_r , wie verlangt. \square

An welcher Stelle würde der Beweis im Reellen scheitern?

Beispiel. Für $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $b \in U$ ist der Differenzenquotient $z \mapsto \frac{f(z)-f(b)}{z-b}$ durch $f'(b)$ stetig ergänzbar, insbesondere beschränkt in einer Umgebung von b . Der Hebbarkeitssatz sagt, dass diese Fortsetzung sogar holomorph ist. Dies war der entscheidende Schritt, um aus dem Cauchyschen Integralsatz die Cauchysche Integralformel herzuleiten.

Der Hebbarkeitssatz hat viele Anwendungen, beispielsweise das Schwarzsche Lemma (\leadsto Übungen).

Wir verallgemeinern nun die Cauchysche Integralformel Satz 23 auf Kreisringe:

Lemma 35 (Cauchysche Integralformel auf Kreisringen). *Es sei $f: A_{r,R} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ist $0 \leq r < \rho < P < R \leq \infty$, so gilt für jedes $z \in A_{\rho,P}$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A_{\rho,P}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis. Setzen wir den Differenzenquotienten von f durch die Ableitung fort,

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z, \end{cases}$$

so erhalten wir eine Funktion $g: A_{r,R} \rightarrow \mathbb{C}$, die holomorph auf $A_{r,R} \setminus \{z\}$ ist und stetig auf dem ganzen Kreisring. Nach dem Hebbarkeitssatz ist g dann holomorph auf $A_{r,R}$.

Wir dürfen Lemma 19 anwenden und schließen daraus:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{L.19}}{=} \int_{\partial B_P} g(\zeta) d\zeta - \int_{\partial B_\rho} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial A_{\rho,P}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ (33) \quad &= \int_{\partial A_{\rho,P}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \underbrace{\int_{\partial B_P} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{=2\pi i} + f(z) \underbrace{\int_{\partial B_\rho} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{=0} \end{aligned}$$

Die Werte der Integrale ergeben sich nach (21) bzw. aus dem Cauchyschen Integralsatz, da $\frac{1}{\zeta-z}$ holomorph auf B_ρ ist. Aber (33) ist gerade die behauptete Integralformel. \square

Bemerkung. Die Cauchysche Integralformel gilt sogar noch allgemeiner: Man kann $A_{r,R}$ durch jedes beschränkte Gebiet U ersetzen.

5.2. Laurentreihen. Nun können wir den bereits erwähnten Satz über die Laurentzerlegung nachweisen:

Satz 36 (Laurent 1843, Weierstraß 1841/94). *Ist f holomorph auf $A_{r,R}$, so gibt es holomorphe Funktionen $g: B_R \rightarrow \mathbb{C}$ und $h: B_{1/r} \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right).$$

Fordert man zusätzlich $h(0) = 0$, so werden g, h eindeutig.

Ist speziell f holomorph auf ganz B_R , dann ist $f \equiv g$ und $h \equiv 0$.

Beweis. 1. Eindeutigkeit: Nehmen wir an, wir hätten zwei Darstellungen von f auf $A_{r,R}$:

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = G(z) + H\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow g(z) - G(z) = h\left(\frac{1}{z}\right) - H\left(\frac{1}{z}\right)$$

Dabei ist $(g - G)(z)$ für $|z| < R$ und $(h - H)\left(\frac{1}{z}\right)$ für $|z| > r$ definiert. Wegen $r < R$ ist

$$\varphi(z) := \begin{cases} g(z) - G(z) & \text{für } |z| < R, \\ h\left(\frac{1}{z}\right) - H\left(\frac{1}{z}\right) & \text{für } |z| > r, \end{cases}$$

eine ganze Funktion. Die stetige Funktion φ ist auf kompakten Teilmengen von \mathbb{C} beschränkt. Weil aber h und H in 0 definiert sind, gilt $\lim_{z \rightarrow \infty} (h\left(\frac{1}{z}\right) - H\left(\frac{1}{z}\right)) = h(0) - H(0)$ und φ ist insgesamt beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist φ konstant. Nach der Zusatzforderung muss $\varphi(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$ gelten, d.h. $\varphi \equiv 0$.

2. Wir zeigen die Existenz der Laurent-Entwicklung zunächst auf $A_{\rho,P}$ für $r < \rho < P < R$. Entsprechend dem Lemma gilt für $z \in A_{\rho,P}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =: g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right),$$

wobei

$$g: B_P \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

$$h: B_{1/\rho} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(w) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{wf(\zeta)}{\zeta w - 1} d\zeta.$$

Diese Funktionen sind holomorph. Dies folgt aus der Leibniz-Regel, weil der Integrand auf den Kreisen stetig ist und die Abhängigkeit von z bzw. w holomorph ist.

Wir betrachten nun $A_{r,R} = \bigcup A_{\rho,P}$, wobei wir über alle erlaubten ρ, P vereinigen. Gilt $A_{\rho',P'} \subset A_{\rho,P}$, so müssen die Laurent-Zerlegungen auf dem kleineren Kreisring nach der Eindeutigkeitsaussage übereinstimmen. Die auf einem kleineren Kreisring definierte Laurent-Zerlegung läßt sich daher eindeutig auf jeden größeren fortsetzen, und wir erhalten deshalb eine wohldefinierte Laurent-Zerlegung auf ganz $A_{r,R}$. \square

Wir entwickeln nun g und den sogenannten *Hauptteil* [principal part] h in Potenzreihen:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für } |z| < R, \quad h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad \text{für } |z| < \frac{1}{r}.$$

Setzt man noch $b_n := a_{-n}$, so kann man schreiben

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = \dots + a_{-2} \frac{1}{z^2} + a_{-1} \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Eine solche Darstellung nennt man *Laurentreihe*. Eine Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ heißt konvergent, wenn jede der beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n}$ konvergiert.

12. Vorlesung, Donnerstag 17.1.08

Oft gewinnt man Laurentreihen aus bekannten Reihenentwicklungen:

Beispiel. Die Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{1}{z - z^2} = \frac{1 - z + z}{z(1 - z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z}.$$

ist auf den Kreisringen $A_{0,1}$ und $A_{1,\infty}$ holomorph und daher als Laurentreihe darstellbar. Entwickeln wir mit der geometrischen Reihe, so erhalten wir Darstellungen durch Laurentreihen

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots & \text{für alle } z \in A_{0,1}(0), \\ \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots & \text{für alle } z \in A_{1,\infty}(0). \end{cases}$$

Weil die geometrische Reihe lokal gleichmäßig konvergiert, konvergieren auch die beiden Laurententwicklungen für $f(z)$ lokal gleichmäßig.

So wie die Koeffizienten der Taylorreihe besitzen auch die Koeffizienten einer Laurentreihe eine Integraldarstellung, die allerdings selten zur tatsächlichen Berechnung verwendet wird. Cauchys Satz 23 über die Existenz der Taylorentwicklung von holomorphen Funktionen auf Bällen besitzt damit ein genaues Analogon für Kreisringe:

Satz 37. *Eine holomorphe Funktion $f: A_{r,R}(b) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - b| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ läßt sich in eine Laurentreihe entwickeln,*

$$(34) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - b)^n,$$

die auf ganz $A_{r,R}(b)$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert. Dabei gilt

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(b)} \frac{f(z)}{(z - b)^{n+1}} dz$$

mit beliebigem $\rho \in (r, R)$.

Beweis. Wie schon beschrieben, folgt die Darstellung (34) aus $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z})$ durch Einsetzen der Potenzreihenentwicklungen für f und g .

Die Formel für a_n kann man aus der entsprechenden Formel (30) für die Taylorreihen von g, h gewinnen. Wir leiten sie statt dessen direkt aus (34) her. Die Reihe

$$z \mapsto \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k+n+1} (z-b)^k$$

konvergiert für $z \in \partial B_\rho$ gleichmäßig. Daher folgt

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}} dz \stackrel{\text{vertausche } f \text{ und } \Sigma}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k+n+1} \int_{\partial B_\rho} (z-b)^k dz,$$

und, da nur für $k = -1$ das Integral einen Beitrag liefert (Satz 15), ist dies wie behauptet

$$\dots = a_n \int_{\partial B_\rho} \frac{dz}{z-b} = a_n 2\pi i. \quad \square$$

5.3. Isolierte Singularitäten. Wir wollen Laurentreihen einsetzen, um Singularitäten zu klassifizieren:

Definition. Ist $f: B_r(b) \setminus \{b\}$ holomorph, so heißt b eine *Singularität* von f . Sie ist

- (i) *hebbbar [removable]*, wenn f eine auf $B_r(b)$ holomorphe Fortsetzung besitzt,
- (ii) *Pol der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ [pole of order n]*, wenn $(z-b)^n f(z)$, aber nicht $(z-b)^{n-1} f(z)$, eine hebbare Singularität in b hat,
- (iii) *wesentlich [essential]* sonst.

Beispiele. 1. $\frac{\sin z}{z}$ hat eine hebbare Singularität in 0 (Potenzreihe!).

2. $\frac{1}{z^n}$ hat einen Pol n -ter Ordnung in 0 für $n \in \mathbb{N}$. Diese Singularitäten sind nicht hebbbar, denn in jeder Umgebung von 0 ist die Funktion unbeschränkt, $|\frac{1}{z}| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow 0$.

3. $\exp(\frac{1}{z}) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$ hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität (folgt aus nächstem Satz).

Wir charakterisieren nun Singularitäten durch die Laurentkoeffizienten:

Satz 38. *Es sei $f: B_r(b) \setminus \{b\}$ holomorph mit Laurentreihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$. Dann ist die Singularität von f in b genau dann*

- (i) *hebbbar, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$,*
- (ii) *ein Pol n -ter Ordnung, wenn $a_{-n} \neq 0$, aber $0 = a_{-n-1} = a_{-n-2} = \dots$,*
- (iii) *wesentlich, wenn es eine Teilfolge $n_k \rightarrow -\infty$ mit $a_{n_k} \neq 0$ gibt.*

Beweis. (i) Eine holomorphe Funktion hat nach Satz 23 eine Taylorentwicklung, und damit gibt es eine Laurentreihe mit verschwindendem Hauptteil. Umgekehrt ist eine Laurent-Entwicklung mit verschwindendem Hauptteil eine Potenzreihe und damit holomorph.

(ii) OBdA sei $b = 0$. Hat $z^n f(z)$ eine hebbare Singularität in 0, so verschwindet der Hauptteil von $z^n f(z)$, d.h. $0 = a_{-n-1} = a_{-n-2} = \dots$. Aber $z^{n-1} f(z) = a_{-n} \frac{1}{z} + a_{-n+1} + \dots$ ist nicht hebbbar, und so gilt $a_{-n} \neq 0$. Hat umgekehrt die Laurentreihe $L(z)$ die angegebene Form, so ist die Singularität von $z^n L(z) = a_{-n} + a_{-n+1}z + \dots$ hebbbar, die von $z^{n-1} L(z) = \frac{a_{-n}}{z} + a_{-n+1} + a_{-n+2}z + \dots$ aber nicht (siehe Beispiel 2).

(iii) Dies ist genau der verbleibende Fall, sowohl für die Singularitätenklassifikation als auch für die Koeffizienten der Laurentreihe. \square

Auch das lokale Abbildungsverhalten charakterisiert Singularitäten:

Satz 39. *Eine Singularität b von $f: B_R(b) \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann*

- (i) (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *hebbbar, wenn f für ein $r > 0$ auf $B_r(b) \setminus \{b\}$ beschränkt ist,*
- (ii) *ein Pol, wenn $|f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow b$ (d.h. für alle $C > 0$ existiert $\varepsilon > 0$ mit $|f(z)| > C$ für alle $|z - b| < \varepsilon$),*
- (iii) (Satz von Casorati-Weierstraß 1868/76) *wesentlich, wenn $f(B_r(b) \setminus \{b\})$ dicht liegt in \mathbb{C} für alle $0 < r < R$ (d.h. für jedes $w \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ gibt es $z \in B_r(b)$ mit $|f(z) - w| < \varepsilon$).*

Beweis. (i) Siehe Satz 34.

(ii) “ \Rightarrow ” Wenn f einen Pol n -ter Ordnung hat, hat $h(z) = (z - b)^n f(z)$ eine hebbare Singularität mit $h(b) \neq 0$. Also gilt $|h(z)| > \frac{1}{2}|h(b)|$ in einer Umgebung U von b , bzw.

$$|f(z)| = \frac{|h(z)|}{|z - b|^n} \geq \frac{|h(b)|}{2|z - b|^n} \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{b\}.$$

Der Grenzwert $z \rightarrow b$ ergibt die Behauptung.

(iii) “ \Rightarrow ” Indirekt: Angenommen, für $w \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ gilt $f(B_r(b) \setminus \{b\}) \cap B_\varepsilon(w) = \emptyset$, d.h. $|f(z) - w| \geq \varepsilon$ für alle $z \in B_r(b) \setminus \{b\}$. Dann ist die Funktion

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}, \quad z \in B_r(b) \setminus \{b\}$$

definiert, holomorph und ungleich 0 und es gilt $|g| = 1/|f(z) - w| \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Also hat g eine hebbare Singularität und eine Taylorentwicklung $g(z) = a_n(z - b)^n + a_{n+1}(z - b)^{n+1} + \dots$ mit $a_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Im Fall $n = 0$ hat die Funktion $f = \frac{1}{g} + w$ eine durch $f(b) = \frac{1}{a_0} + w$ hebbare Singularität, bzw. für $n > 0$ einen Pol n -ter Ordnung also keine wesentliche Singularität.

(ii) “ \Leftarrow ” Ist b eine nicht hebbare Singularität mit $\lim_{z \rightarrow b} |f(z)| = \infty$, so kann nach der bewiesenen Richtung von (iii) die Singularität nicht wesentlich sein, also ist sie ein Pol.

(iii) “ \Leftarrow ” Hat f eine nicht hebbare Singularität b mit dichtem Bild, so kann nicht $|f(z)| \rightarrow \infty$ gelten, d.h. b ist kein Pol. \square

Tatsächlich nimmt f in der Umgebung einer wesentlichen Singularität sogar jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme an. Beispielsweise nimmt $\exp \frac{1}{z}$ alle Werte bis auf 0. Die Aussage ist der sogenannte *große Satz von Picard*, dessen Beweis über unseren Rahmen hinausgeht (siehe z.B. Remmert, Funktionentheorie 2, Kapitel X).

5.4. Anwendung: Partialbruchzerlegung und Fourierreihen. In diesem Abschnitt verwenden wir die Laurent-Zerlegung, um zwei Resultate zu erzielen, die auch für die reelle Analysis wichtig sind.

Es seien p, q Polynome auf \mathbb{C} , dabei $q \neq 0$. Nach dem Hauptsatz der Algebra hat $q(z) = c(z - b_1)^{n_1} \dots (z - b_\ell)^{n_\ell}$ eine Nullstellenmenge $N(q) = \{b_1, \dots, b_\ell\}$ von höchstens $\text{grad } q$ Punkten. Man nennt dann

$$f: \mathbb{C} \setminus N(q) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$$

eine *rationale Funktion*. Die Funktion f hat in $b_j \in N(q)$ hebbare Singularitäten oder Pole, deren Ordnung man aus den Linearfaktorzerlegungen von p und q bestimmen kann.

Mit Hilfe von Laurentreihen kann man einfach eine *Partialbruchzerlegung* rationaler Funktionen gewinnen:

Satz 40. Sei f eine rationale Funktion mit ℓ Polen b_1, \dots, b_ℓ der Ordnung n_1, \dots, n_ℓ . Dann gibt es $\ell + 1$ eindeutig bestimmte Polynome p_0, p_1, \dots, p_ℓ mit $\text{grad } p_j \leq n_j - 1$ für $j = 1, \dots, \ell$, so dass

$$(35) \quad f(z) = p_0(z) + \frac{p_1(z - b_1)}{(z - b_1)^{n_1}} + \dots + \frac{p_\ell(z - b_\ell)}{(z - b_\ell)^{n_\ell}}, \quad \text{für alle } z \neq b_1, \dots, b_\ell.$$

13. Vorlesung, Donnerstag 24.1.08

Beweis. Sei $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Weil f in b_j einen Pol n_j -ter Ordnung hat, lautet der Hauptteil der Laurententwicklung von f in b_j

$$h_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} a_{k,j} \frac{1}{(z - b_j)^k} = \frac{1}{(z - b_j)^{n_j}} \sum_{k=1}^{n_j} a_{k,j} (z - b_j)^{n_j - k} =: \frac{1}{(z - b_j)^{n_j}} p_j(z - b_j),$$

wobei p_j ein Polynom der Ordnung höchstens $n_j - 1$ ist. Da die Hauptteile h_1, \dots, h_ℓ rational sind, ist auch

$$(36) \quad p_0 := f - (h_1 + \dots + h_\ell)$$

rational. Aber alle Singularitäten von p_0 sind hebbar, also muss p_0 Polynom sein. Verwendet man in (36) die letztgenannte Darstellung der h_j , so erhält man (35).

Weil die Hauptteile h_j eindeutig bestimmt ist, sind es auch p_1, \dots, p_ℓ und damit p_0 . \square

Welchen Grad hat das Polynom p_0 höchstens?

Sind allgemeiner $f, g \neq 0$ holomorph, so nennt man den Quotient $\frac{f}{g}$ *meromorph*. Meromorphe Funktionen sind also holomorphe Funktionen bis auf diskret verteilte Singularitäten.

Wir kommen nun zu Fourierreihen für periodische Funktionen. Unser Ziel ist eine Entwicklung für reelle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die periodisch sind, $f(t) = f(t + 2\pi)$. Allerdings beschränken wir uns hier auf den Spezialfall, dass f eine holomorphe Fortsetzung in eine Umgebung der x -Achse hat, d.h. wir nehmen hier an, f ist auf einem Streifen $S \subset \mathbb{C}$ definiert, periodisch und holomorph.

Satz 41. Sei $f: S = \{z \in \mathbb{C} : -a < \operatorname{Im} z < b\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wobei $0 < a, b \leq \infty$. Ist f periodisch, d.h. $f(z + 2\pi) = f(z)$ für alle $z \in S$, so läßt sich f in eine konvergente komplexe Fourierreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inz} \quad \text{für alle } z \in S$$

entwickeln, wobei

$$a_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Beweis. Wir transformieren die Funktion auf den Kreisring und entwickeln sie dort in eine Laurentreihe.

Die Funktion $z \mapsto e^{iz}$ bildet S surjektiv auf $A_{r,R}$ ab, wobei $r := e^{ia} = e^{-b}$ und $R := e^{i(-ia)} = e^a$. Offenbar gilt $0 \leq r < 1 < R \leq \infty$. Wir behaupten: Es gibt eine holomorphe Funktion

$$F: A_{r,R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(e^{iz}) = f(z).$$

Dies erklärt F sogar eindeutig auf $A_{r,R}$, denn $e^{iz} = e^{iw} \Leftrightarrow z - w \in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow f(z) = f(w)$. Weil \exp als Funktion mit $\exp' \neq 0$ lokal durch eine Funktion Log umkehrbar ist, gilt lokal $F(w) = f\left(\frac{1}{i} \operatorname{Log} w\right)$ und F ist als Zusammensetzung holomorpher Funktionen selbst holomorph.

Nach dem Satz 37 über die Laurententwicklung gilt dann für $w \in A_{r,R}$

$$F(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^n,$$

woraus für $w := e^{iz}$ mit $z \in S$ die angegebene Darstellung folgt. Die Laurent-Koeffizienten sind

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{F(w)}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F(e^{it})}{e^{i(n+1)t}} i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

□

Bemerkungen. 1. Ist $F: A_{r,R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige holomorphe Funktion, so besagt die gezeigte Formel $a_n = \frac{1}{2\pi} \int F(e^{it}) e^{-int} dt$, dass man die Laurent-Koeffizienten von F als Mittelwerte der mit der Schwingung $e^{-int} = \cos(nt) - i \sin(nt)$ gewichteten Funktion F verstehen kann.

2. Zwar haben wir die holomorphe Fortsetzbarkeit einer 2π -periodischen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ angenommen, um die Fourier-Entwicklung zu beweisen. Die Aussage gilt aber sehr viel allgemeiner, z.B. für Funktionen, die bis auf endlich vieler Punkte stetig sind. Tatsächlich braucht man die Integrierbarkeit von $|f|^2$ in einem geeigneten Sinn ($f \in L^2$, kommt im 4. Semester). Diese allgemeinere und schwierigere Aussage muss man mit Methoden der reellen Analysis beweisen, siehe Forster 1.

3. Genügt speziell $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ den Voraussetzungen des Satzes, so leitet man aus den komplexen Formeln die folgende reelle Version der Fourierdarstellung leicht her:

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nt,$$

wobei für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\alpha_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \quad \alpha_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt, \quad \beta_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Zum Abschluss möchte ich angeben, wie man Fourierreihen mit linearer Algebra deutet:

- Auf dem unendlich-dimensionalen Vektorraum $C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ ist

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

ein hermitesches Skalarprodukt.

- Die Vektoren $e_n(t) := e^{int}$, bilden eine Orthonormalbasis $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$; man muss dazu $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$ nachprüfen. Die Fourierreihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n(z)$ ist dann eine unendliche Linearkombination, d.h. man kann die Folge der Koeffizienten $a_n = \langle f, e_n \rangle$ als Koordinaten von f ansehen.

- Im vierten Semester werden wir sehen, wie man den Raum $C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ so modifiziert, dass er bezüglich der Norm $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ vollständig wird, d.h. zu einem Hilbertraum

(vollständiger Vektorraum mit Skalarprodukt). Für jedes f aus diesem Raum gilt dann der verallgemeinerte Satz des Pythagoras $\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$.

6. GLOBALE FUNKTIONENTHEORIE

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt $\int_c f(z) dz = 0$ für jede holomorphe Funktion f und jede nullhomotope Schleife c . Unser Ziel ist es, diesen Satz auf Funktionen mit Singularitäten zu verallgemeinern. Für Funktionen mit Singularitäten verschwindet das Schleifenintegral nicht mehr, so dass unsere Aufgabe darin besteht, den Wert von $\int_c f(z) dz$ zu bestimmen, wenn f holomorph außerhalb von endlich vielen Singularitäten ist.

Beispiel. Für $f(z) = \frac{1}{z-p}$ gilt längs der k -fach durchlaufenen Kreislinie $c(t) := a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi k]$,

$$(37) \quad \int_c \frac{1}{z-b} dz = k \int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{z-b} dz = \begin{cases} 0 & \text{für } r < |b-a|, \\ 2\pi i k & \text{für } r > |b-a|. \end{cases}$$

6.1. Windungszahl. Wir können (37) so verstehen, dass das Integral mißt, wie oft sich die Kurve c um die Singularität z herumwindet. Wir definieren entsprechend im allgemeinen:

Definition. Sei c eine stückweise C^1 -Schleife und $b \in \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(c)$. Dann ist die *Windungszahl* [winding number] von c um b gegeben durch

$$(38) \quad n(b, c) := \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{z-b} dz.$$

Diese Zahl heißt auch *Index* (oder *Umlaufzahl*) von c bezüglich b .

Beispiele. 1. Für $k \in \mathbb{Z}$ hat die Kreislinie $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $c(t) = a + re^{ikt}$ die Windungszahl $n(b, c) = k$ für $b \in B_r(a)$ und $n(b, c) = 0$ für $b \notin B_r(a)$.

2. Eine Figur "acht" hat für b in einem Auge Windungszahl 1, im anderen -1 .

3. Für jede Schleife c gilt: Für p aus der nichtkompakten Komponente von $\mathbb{C} \setminus c([a, b])$ gilt $n(p, c) = 0$.

Wir wollen nun erklären, warum $n(p, c)$ tatsächlich als Windungszahl verstanden werden kann. Die folgenden Bemerkungen werden aber für die Herleitung des Residuensatzes nicht unbedingt gebraucht.

1. Nehmen wir an, die Kurve $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus p$ besitze eine Polarkoordinatendarstellung

$$(39) \quad c(t) - p = r(t)e^{i\vartheta(t)} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad r: [a, b] \rightarrow (0, \infty), \quad \vartheta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dabei seien r, ϑ stückweise C^1 -Funktionen, insbesondere stetig. Wenn c Schleife ist, muss gelten $r(b) = r(a)$, während $\frac{1}{2\pi}(\vartheta(b) - \vartheta(a))$ gerade die anschauliche Windungszahl ist. Es

gilt nun

$$(40) \quad \begin{aligned} 2\pi i n(p, c) &= \int_c \frac{1}{z-p} dz = \int_a^b \frac{c'(t)}{c(t)-p} dt = \int_a^b \frac{r'e^{i\vartheta} + ir'\vartheta'e^{i\vartheta}}{re^{i\vartheta}} dt \\ &= \int_a^b \frac{r'}{r} + i\vartheta' dt = [\log r + i\vartheta]_a^b = i(\vartheta(b) - \vartheta(a)), \end{aligned}$$

so dass tatsächlich

$$n(p, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{z-p} dz \in \mathbb{Z}$$

die anschauliche Windungszahl ist. Diese Identität basiert natürlich auf der Polardarstellung (39), deren Beweis vielleicht eine Seite in Anspruch nehmen würde.

2. Es ist instruktiv, die Rechnung (40) mit dem komplexen Logarithmus Log auszuführen. Auf dem Schlitzgebiet $S := \mathbb{C} \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ setzen wir

$$\text{Log}: S \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{Log}(z) := \log |z| + i \arg z$$

(siehe Analysis 1). Wie im Reellen ist der komplexe Logarithmus Stammfunktion von $\frac{1}{z}$, denn

$$\text{Log}' z = (\exp^{-1})'(z) = \frac{1}{\exp'(\text{Log } z)} = \frac{1}{z}.$$

Leider müssen wir die Kurve c in Teilkurven zerlegen, auf denen der Logarithmus jeweils geschlossen definiert ist. Nehmen wir o.B.d.A. an, die Kurve $c-p: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ liege genau für endlich viele Zeiten $a = a_1 < \dots < a_{k+1} = b$ auf dem Schlitz S . Dann gilt $c_j: (a_j, a_{j+1}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus S$ und $c = c_1 + \dots + c_k$. Unter Benutzung der Notation $f(t^\pm) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} f(t \pm \varepsilon)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{c_j} \frac{1}{z-p} dz &= \text{Log}(c(a_{j+1}^-)) - \text{Log}(c(a_j^+)) \\ &= \log |c(a_{j+1})| - \log |c(a_j)| + i(\arg c(a_{j+1}^-) - \arg c(a_j^+)). \end{aligned}$$

Die Windungszahl von c_j sei

$$n_j := n(p, c_j) := \frac{1}{2\pi} (\arg c(a_{j+1}^-) - \arg c(a_j^+)) \in \{0, \pm 1\}.$$

Dabei ist $n_j = 0$, wenn die Enden von c_j von der gleichen Seite gegen den Schlitz laufen. Laufen sie aber von zwei verschiedenen Seiten dagegen, so ist $n_j = \pm 1$ mit einem Vorzeichen, das der Kreuzungsrichtung entspricht. Summieren wir alle Integrale, so verschwindet der Realteil als Teleskopsumme, während sich die Windungszahlen aufsummieren:

$$\int_c \frac{1}{z-p} dz = \sum_{j=1}^k \int_{c_j} \frac{1}{z-p} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k n_j.$$

Das Integral entspricht also der Summe der Windungszahlen der c_j , das heißt der Windungszahl von c . Insbesondere sieht man erneut $n(p, c) \in \mathbb{Z}$.

3. (*Übung*) Schreiben Sie das Kurvenintegral (38) reell, d.h. bestimmen Sie Vektorfelder X und Y auf $\mathbb{C} \setminus p$, so dass $\int \frac{1}{z-p} dz = \int X \cdot ds + i \int Y \cdot ds$. Besitzen die Felder X und Y Potentiale auf

$\mathbb{C} \setminus p$? Kennen Sie Y ? Nehmen Sie eine Polardarstellung von $c(t) - p$ an und prüfen Sie nun die Rechnung (40) nach. Welches reelle Integral gibt also einen stetigen Polarwinkel $\vartheta(t)$ an?

14. Vorlesung, Donnerstag 31.1.08 _____

6.2. **Residuensatz.** Natürlich hängt der Wert des Schleifenintegrals $\int_c f(z) dz$ von der Art der Singularitäten von f ab. Tatsächlich wird es nur auf folgendes ankommen:

Definition. Es sei $f: U \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit Laurentreihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n$ auf $A_{0,R}(b) \subset U$. Das *Residuum* von f in b ist

$$\operatorname{res}_b(f) := a_{-1}.$$

Beispiele. 1. Die Funktion $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, hat in $b = 0$ für $n = -1$ das Residuum 1, sonst 0.

2. Die Funktion $\exp \frac{1}{z}$ hat in $b = 0$ das Residuum 1.

3. Für eine holomorphe Funktion verschwindet das Residuum in allen Punkten.

Wir können nun den Cauchyschen Integralsatz auf Funktionen mit Singularitäten verallgemeinern:

Satz 42 (Residuensatz, Cauchy 1826). *Es sei U ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $c: [a, b] \rightarrow U \setminus \{b_1, \dots, b_k\}$ eine stückweise C^1 -Schleife, und $f: U \setminus \{b_1, \dots, b_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$\int_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k n(b_j, c) \operatorname{res}_{b_j} f.$$

Dieser Satz enthält als Spezialfälle:

- Für $k = 0$ ist f holomorph. Dann ist die Aussage der Cauchysche Integralsatz.
- Für $f(z) = \frac{1}{z^n}$ und $c = \partial B_r$ ergibt sich Satz 15.
- Für $f(z) = \frac{1}{z}$ und den mehrfach durchlaufenen Kreis erhalten wir (37).

Der Residuensatz sagt, dass für ein Schleifenintegral $\oint f(z) dz$ nur die Koeffizienten a_{-1} der Laurentreihen um die Singularitäten von f eine Rolle spielen, und zwar gewichtet mit der Windungszahl der Kurve c um die jeweilige Singularität. Alle anderen Laurent-Koeffizienten gehen nicht ein.

Beweis. Für $1 \leq j \leq k$ sei $h_j(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n,j}(z-b_j)^{-n}$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f bezüglich b_j . In $U \setminus b_j$ ist h_j holomorph. Wir behaupten, dass nach Abziehen der Singularitäten eine holomorphe Funktion $g(z) := f(z) - h_1(z) - \dots - h_k(z)$ entsteht.

Sicher ist g holomorph außerhalb von $\{b_1, \dots, b_k\}$. Aber in einer kleinen Kreisscheibe mit Mittelpunkt b_j ist die Funktion $f(z) - h_1(z)$ eine konvergente Potenzreihe, und daher holomorph. Die übrigen $h_2(z), \dots, h_k(z)$ sind dort ohnehin holomorph. Also ist g im Punkt b_1 tatsächlich holomorph, ebenso für alle anderen b_j . Wir folgern:

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &= \int_c g(z) dz + \sum_{j=1}^k \int_c h_j(z) dz \\ &\stackrel{\text{CIS}}{=} 0 + \sum_{j=1}^k \int_c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n,j}}{(z-b_j)^n} dz = \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \int_c \frac{a_{-n,j}}{(z-b_j)^n} dz \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichheit haben wir Spur $c \subset\subset U \setminus \{b_1, \dots, b_k\}$ benutzt: Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der Laurentreihe auf Spur c , so dass wir Integration und Summation vertauschen dürfen.

Für alle $n \geq 2$ besitzt der Integrand eine Stammfunktion (welche?). Also verschwinden diese Summanden und es verbleibt

$$\int_c f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_c \frac{a_{-1,j}}{z-b_j} dz = \sum_{j=1}^k a_{-1,j} \int_c \frac{1}{z-b_j} dz = \sum_{j=1}^k \text{res}_{b_j}(f) 2\pi i n(b_j, c) \quad \square$$

6.3. Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz. Viele uneigentliche reelle Integrale, die direkt nicht zu berechnen sind, kann man bequem mit dem Residuensatz bestimmen. Die Berechnung der dabei auftretenden Residuen vereinfacht die folgende Feststellung:

Satz 43. (i) Die holomorphe Funktion $f: B_r(b) \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{C}$ besitze eine Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{(z-b)^n} h(z) \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N},$$

wobei $h: B_r(b) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph sei mit Potenzreihe $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-b)^k$. Dann gilt

$$(41) \quad \text{res}_b f = a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} h^{(n-1)}(b).$$

(ii) Der Quotient $f := \frac{g}{h}: B_r(b) \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{C}$ zweier holomorpher Funktionen $g, h: B_r(b) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(42) \quad g(b) \neq 0, \quad h'(b) \neq 0 \quad \text{und} \quad h(z) = 0 \quad \text{nur für } z = b,$$

hat im Punkt b einen Pol erster Ordnung mit $\text{res}_b f = \frac{g(b)}{h'(b)}$.

Beweis. (i) Offenbar ist $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-b)^{k-n}$, so dass $\text{res}_b f = a_{n-1}$. Die zweite Darstellung in (41) gilt immer für Taylorkoeffizienten.

(ii) Durch Potenzreihenentwicklung im Punkt $z = b$ erhalten wir:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(b) + o(z-b)}{h'(b)(z-b) + o(z-b)^2} = \frac{1}{z-b} \left(\frac{g(b) + o(z-b)}{h'(b) + o(z-b)} \right),$$

so dass $\lim_{z \rightarrow b} (z-b)f(z) = \frac{g(b)}{h'(b)}$. Aus der Laurententwicklung von f sieht man aber: Wenn der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow b} (z-b)f(z)$ existiert, hat f einen Pol erster Ordnung in b , und in diesem Fall ist der Grenzwert gerade das Residuum a_{-1} . \square

Beispiel. Die Funktion

$$f(z) = \frac{\exp(iz)}{z^2 + 1}$$

hat in $b := i$ wegen $f(z) = \frac{1}{z-i} \frac{\exp(iz)}{z+i} = \frac{1}{z-i} h(z)$ einen Pol erster Ordnung ($n = 1$). Das Residuum ist laut (i)

$$\operatorname{res}_i f \stackrel{(41)}{=} h(i) = \frac{\exp i^2}{i+i} = \frac{1}{2ei} = -\frac{i}{2e}.$$

Noch einfacher ist es, (ii) zu benutzen. Tatsächlich erfüllen auf $B_1(i)$ die Funktionen $g(z) = \exp(iz)$ und $h(z) = z^2 + 1$ mit $h'(z) = 2z$ die Annahme (42) und deshalb gilt

$$\operatorname{res}_i f = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{\exp(-1)}{2i} = -\frac{i}{2e}.$$

Wir berechnen nun als Anwendung das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^4} dt$. Durch die Majorisierung $\frac{1}{1+t^4} \leq \frac{1}{t^4}$ für $t \neq 0$ sieht man sofort, dass das uneigentliche Integral existiert und absolut konvergiert. Also ist

$$(43) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^4} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} \frac{1}{1+t^4} dt.$$

In einem ersten Schritt ergänzen wir das Intervall $[-R, R]$ mit dem oberen Halbkreis zu einer Schleife in \mathbb{C} . Setzen wir $h_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, so ist $c_R := [-R, R] + h_R$ Schleife.

Die Funktion $f(z) := \frac{1}{1+z^4}$ ist holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Diese Singularitäten sind gerade die vier Nullstellen des Polynoms $1+z^4$,

$$(44) \quad \left\{ \exp\left(i\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) : k = 0, 1, 2, 3 \right\}.$$

Geometrisch sind dies die Schnittpunkte des Einheitskreises mit den beiden Winkelhalbierenden. Davon liegen genau die beiden Punkte

$$b_1 := \exp\left(\frac{1}{4}\pi i\right) \quad \text{und} \quad b_2 := \exp\left(\frac{3}{4}\pi i\right)$$

in der oberen Halbebene $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Wir nehmen von nun an $R > 1$, so dass die Spur von c_R keine Singularitäten enthält. Der Residuensatz liefert

$$(45) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c_R = [-R, R] + h_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 2\pi i \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k n(b_j, c_R) \operatorname{res}_{b_j} f$$

Wir berechnen zuerst die linke Seite. Der ergänzende Kreisbogen h_R ist gerade so gewählt, dass er im Grenzwert keinen Beitrag zum Kurvenintegral liefert:

$$\left| \int_{h_R} \frac{1}{1+z^4} dz \right| \leq \sup_{t \in [0, \pi]} \frac{L(h_R)}{|1+h_R^4(t)|} \leq \sup_{t \in [0, \pi]} \frac{\pi R}{|h_R(t)|^4 - 1} \leq \frac{\pi R}{R^4 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty$$

Die linke Seite stimmt also mit unserem uneigentlichen Integral (43) überein.

Für die rechte Seite von (45) benötigen wir die Windungszahl. Man sieht sofort $n(b, c_R) = 1$ für alle $b \in B_R$ mit $\operatorname{Im} b > 0$. In der Tat gilt nach Definition der Windungszahl

$$n(b, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_R} \frac{1}{z-b} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{1}{z-b} dz = 1,$$

denn auf der unteren Halbkreisscheibe ist $\frac{1}{z-b}$ holomorph und ∂B_R ist gerade die Summe von c_R und dem Rand der unteren Halbkreisscheibe.

Schließlich müssen wir noch die Residuen von f bestimmen. Weil $h(z) = 1+z^4$ Polynom vierter Ordnung ist, sind die vier Nullstellen (44) einfach, und nach Satz 43(ii) gilt

$$\operatorname{res}_{b_j} f = \operatorname{res}_{b_j} \frac{1}{h} = \frac{1}{h'(b_j)} = \frac{1}{4b_j^3} \quad \text{für } j = 1, 2.$$

Folglich sind

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{b_1} f &= \frac{1}{4 \exp^3(i\pi/4)} = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{3}{4}\pi i\right) = \frac{1}{8} \sqrt{2}(-1-i), \\ \operatorname{res}_{b_2} f &= \frac{1}{4 \exp^3(i3\pi/4)} = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{9}{4}\pi i\right) = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right) = \frac{1}{8} \sqrt{2}(1-i), \end{aligned}$$

und wir erhalten $\operatorname{res}_{b_1} f + \operatorname{res}_{b_2} f = -\frac{i}{4} \sqrt{2} = -i \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Als Endergebnis ergibt sich daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^4} dt = 2\pi i (\operatorname{res}_{b_1} f + \operatorname{res}_{b_2} f) = 2\pi \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Mit dieser Methode lassen sich viele reelle Integrale berechnen. Statt eines Halbkreises ist manchmal ein Rechteck zweckmäßig; hat der Integrand reelle Pole, so kann mit sie unter Umständen auf Halbkreisbögen umrunden.

Ende der Vorlesung _____

INDEX

- analytisch, 29
- analytische Fortsetzung, 31
- Argument, 1

- Betrag, 1

- Casorati, F., 43
- Cauchy-Riemann-Gleichungen, 4, 30
- Cauchysche Integralformel, 39

- differenzierbar, komplex, 3
- diskrete Menge, 30
- Dualraum, 20

- einfach zusammenhängend, 14, 16, 24
- Einsformen, 20

- Fourierreihe, 45

- ganze Funktion, 32
- Gebiet, 12
- Gebietstreue, 35
- geometrische Reihe, 6, 30, 41
- geschlitzte Ebene, 15

- Häufungspunkt, 30
- Häufungspunkte, 30
- harmonisch, 5
- Hauptsatz der Algebra, 33, 36, 44
- Hauptteil (Laurentreihe), 41
- hebbare Singularität, 42
- Hebbarkeitssatz von Riemann, 38, 43
- holomorph, 3
- Homotopie, 14, 17

- Identitätssatz, 31
- Imaginärteil, 1
- Integrabilitätsbedingung, 19
- Intervall, 11
- inverse Kurve, 10

- Körperhomomorphismus, 1
- kompakt enthalten $\subset\subset$, 25
- komplexes Kurvenintegral, 22

- konform, 2, 5, 33
- konjugiert, 1
- konservativ (Vektorfeld), 12
- Konvergenzradius, 6, 31, 32
- konvex, 15
- Kreisring $A_{r,R}$, 15, 38
- Kurve, 9
- Kurvenintegral, 10, 22

- Laurent, P.A (1813–1854), 39
- Laurentreihe, 41, 42, 45, 50
- links (bei Parametrisierungen), 25
- Liouville, J. (1809–1882), 32
- Logarithmus, 49
- lokal gleichmäßig konvergent, 6
- lokal konstant, 5
- lokale Stammfunktion, 25

- Maximumprinzip, 34
- meromorph, 45
- Mittelwertseigenschaft, 26, 35
- Multiplikation komplexer Zahlen, 1

- nullhomotop, 14, 16, 23

- orientierungstreu, 2

- Partialbruchzerlegung, 44
- Pfaffsche Formen, 20
- Picard, E. (), 33, 44
- Pol, 42
- Polarwinkel, 16
- Potential(funktion), 8
- Potenzreihe, 5
- Produkt komplexer Zahlen, 1

- rationale Funktion, 44
- Realteil, 1
- relativ offen, 11
- Residuum, 50
- Rotation, 9

- Satz von Liouville, 32, 33, 40

Schleife, 9

Singularität, 42

Spur, 9

stückweise C^1 , 9

Stammfunktion, 21, 30

Sterngebiete, 15

Summe von Kurven, 9

Umlaufzahl, 48

wegzusammenhängend, 11

wesentliche Singularität, 42

Windungszahl, 48

winkelerhaltend, 2

zusammenhängend, 11

zusammenziehbar, 14