Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
11.12.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

9. Übung zu Funktionentheorie

Aufgabe 27 – Test:

1) Warum sind die folgenden Gebiete nicht einfach zusammenhängend?
   - $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
   - $B_R \setminus \overline{B}_r$ für $R > r > 0$

2) Sei $c \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $c(t) = e^{i1004t}$. Berechnen Sie

$$\int_c \frac{1}{z}\, dz.$$

3) Seien $a_k \in \mathbb{C}$ für $k = 0, \dots, n$. Bestimmen Sie

$$\int_{|z|=1} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \, dz \quad \text{und} \quad \int_{|z|=1} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k \, dz$$

Aufgabe 28 – Cauchys Integralformel:
Berechnen Sie folgende Integrale anhand von Cauchys Integralformel:

$$\int_{\partial B_1} \frac{e^z}{z}\, dz, \quad \int_{|z-2i|=1} \frac{1}{z^2+4} dz$$

Aufgabe 29 – Divergenz eines Vektorfeldes:

1) Es sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir definieren auf U folgende Vektorfelder:

$$X := \bar{f} \text{ und } Y := i\bar{f}.$$

   Die Divergenz eines Vektorfeldes $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ist definiert als $\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \partial_i X_i$. Zeigen Sie: $\operatorname{div} X = \operatorname{div} Y = 0$.

2) Skizzieren Sie die Vektorfelder X und Y für das Beispiel $f(z) = z$. Sehen Sie sich zuerst X, Y auf dem Einheitskreis an.
   Vor allem für Physiker: Warum können Sie X, Y als Strömungsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit interpretieren? Skizzieren Sie Integralkurven der Felder X und Y.

3) Sei X ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ und $Y := JX$, wobei J für die Matrix der komplexen Multiplikation mit i steht. Zeigen Sie $\operatorname{div} Y = \operatorname{rot} X$ und $\operatorname{div} X = \operatorname{rot} Y$.

Hausaufgabe 17 – Cauchys Integralsatz und -formel (Ph.):

1) Bestimmen Sie die Nullstellen von $\sin z$ in $\mathbb{C}$.

2) Zeigen Sie: Die Funktion

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C}$.

3) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{\sin z}\, dz, \quad \int_{|z|=1} \frac{1}{\sin z}\, dz.$$

Hausaufgabe 18 – Harmonische Funktionen:

Sei $U \in \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit $u(p) = 0$ für ein $p \in U$. Der Laplace-Operator von u ist gegeben durch

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$$

Die Funktion u heißt harmonisch, wenn sie der Differentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

genügt.

1) Zeigen Sie: Ist U einfach zusammenhängend, so existiert eine holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f = u$.
(Tipp: Stellen Sie $f(z)$ als Kurvenintegral dar.)

2) Zeigen Sie: Die Funktion $v = \operatorname{Im} f$ ist ebenfalls harmonisch. Sie heißt die zu u konjugiert harmonische Funktion. Ist f eindeutig bestimmt?