Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
04.12.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Übung zu Funktionentheorie

Aufgabe 24 – komplexes Kurvenintegral:

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{|z|}\,dz, \quad \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{|z|^{2007}} dz, \quad \int_{\partial B_1(0)} e^{-z^2}\,dz,$$
$$\int_{\partial B_1(0)} \bar{z}^n\,dz\ (n \neq 1), \quad \int_{\partial B_2(2i)} \frac{z^2-4iz-3}{z-2i}\,dz$$

Aufgabe 25 – Differenzenquotienten:

Sei U ein Gebiet und $f \in C^0(U, \mathbb{C})$ eine stetige Funktion. Ferner sei $z_0 \in U$ beliebig gewählt. Wir setzen

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, \quad z \in U.$$

Zeigen Sie mit Differenzenquotienten:

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$$

Aufgabe 26 – Vertauschungssatz:

Es sei $\gamma\colon I \to U$ ein Weg. Ferner sei $f_n\colon U \to \mathbb{C}$ eine Folge komplex differenzierbarer Funktionen, die auf $\mathrm{Spur}(\gamma)$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon\ \mathrm{Spur}\,\gamma \to \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Hausaufgabe 15 – Interpretaion der Rotation eines Vektorfeldes (Ph.):

1) Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $0 \in U$ und $X \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld. Der Kreis in U ist gegeben $c_r \colon [0, 2\pi] \to U$, $c_r(t) = (r \cos t, r \sin t)$. Zeigen Sie
$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{c_r} X \cdot ds = \operatorname{rot} X(0)$$
Tipp: Wenden Sie die Taylorformel auf $X(0 + c_r(t))$ an.

2) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, welche Null enthält und $X \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld. Ferner sei (v_1, v_2, ν) eine orthonormale Basis (positiv orientiert) des $\mathbb{R}^3$ und c_r die Kreislinie in U mit $c_r(t) = r \cos t \cdot v_1 + r \cos t \cdot v_2$. Zeigen Sie:
$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{c_r} X \cdot ds = \langle \operatorname{rot} X(0), \nu \rangle$$

3) Versuchen Sie die ergebnisse für eine Strömung mit Geschwindigkeitsfeld X zu interpretieren. Stellen Sie sich c_r als einer in 0 befestigter Testkreis vor, dem die Strömung zum Rotieren bringt. Wie groß ist die diese Rotation verursachte Kraft?

Hausaufgabe 16 – Globale Umkehrbarkeit:

Die Funktion $f \colon G \to \mathbb{C}$ sei holomorph und das Gebiet G sei konvex. Zeigen Sie: Wenn $\operatorname{Re} f' > 0$, so ist f injektiv.