Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
27.11.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

7. Übung zu Funktionentheorie

Aufgabe 21 – Die Längenabschätzung:

Die *Länge* einer Kurve $\gamma\colon [a,b] \to U \subset \mathbb{C}$ ist erklärt als

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

Zeigen Sie: Wenn $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig ist, gilt:

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \operatorname{Spur}\gamma} |f(z)|.$$

Aufgabe 22 – Wegabhängigkeit des komplexen Kurvenintegrals:

1) Ist $|z|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph?

2) Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral $\int_c |z|\, dz$ für zwei verschiedene Wege in $\mathbb{C}$ von -1 nach 1: zum einen für einen Weg auf der reellen Achse, zum anderen für den oberen Halbkreis. Warum hat f keine Stammfunktion ?

Aufgabe 23 – Potential:

Gegeben sei das Vektorfeld $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$X(x,y) := \begin{pmatrix} x+y \\ x+1 \end{pmatrix}$$

1) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld X ein Potenzial $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ besitzt.

2) Sei $f(0,0) = 0$. Bestimmen Sie f durch Integration.

Hausaufgabe 13 – Cauchys Integralsatz für lineare Funktionen (Ph.):

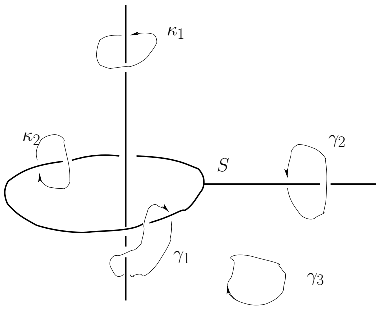
Sei Q das Quadrat mit Ecken $0, 1, 1+i, i$. Ferner sei c eine Parametrisierung vom Rand ∂Q. Die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto Az$ sei gegeben durch die reelle Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie: Das Wegintegral $\int_c f\,dz$ verschwindet genau dann, wenn f eine Drehstreckung ist, d.h.

$$\int_c f\,dz = 0 \iff a = d \text{ und } b = -c$$

Hausaufgabe 14 – Kurvenintegrale (nicht einfachzusammenhängend):

Es sei S die Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus der Vereinigung von



a) der z-Achse,

b) dem Kreis $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$,

c) der Halbgeraden $\{(0, y, 0), y \geq 1\}$.

Gegeben seien ferner geschlossene Integrationswege $\kappa_1, \kappa_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ in $U := \mathbb{R}^3 \setminus S$ wie skizziert, sowie ein auf U rotationfreies Vektorfeld $X\colon U \to \mathbb{R}^3$ (d.h. die Integrabilitätsbedingung $\partial_i X_j = \partial_j X_i$ gilt auf U für alle i, j). Wir nehmen an

$$\int_{\kappa_1} X \cdot ds = 2, \quad \int_{\kappa_2} X \cdot ds = 3.$$

Was läßt sich über die Integrale $\int_{\gamma_i} X \cdot ds$ für $i = 1, 3$ aussagen?
(Zusatz) Was läßt sich über das Integral $\int_{\gamma_2} X \cdot ds$ aussagen?
(Tipp: Verwenden Sie die Idee aus Hausaufgabe 12)