Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
20.11.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# 6. Übung zu Funktionentheorie

**Aufgabe 18 – Teilmengen in $\mathbb{C}$ (Ph.):**

1) Sei $H = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$ die offene obere Halbebene. Zeigen Sie:

$$z \in H \Leftrightarrow -\frac{1}{z} \in H.$$

2) Skizzieren Sie die folgenden Mengen und prüfen Sie, ob sie konvex oder sternförmig sind.

   (a) $\{z \in \mathbb{C} \colon 1 < \operatorname{Re}(iz) < 2\}$
   (b) $\{z \in \mathbb{C} \colon 2 < |z - 1 + i| < 4\}$
   (c) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - i| = |z - 3i|\}$
   (d) $\{z \in \mathbb{C} \colon |\arg z| < \frac{\pi}{4} \text{ oder} |\arg z| > \frac{3\pi}{4}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$

**Aufgabe 19 – Winkel differenzierbarer Kurven(Ph.):**

1) Seien $\gamma_1, \gamma_2 \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^n$ zwei differenzierbare reguläre Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p \in U$. Definieren Sie den Schnittwinkel der beiden Kurven in $p$.

2) Wiederholen Sie: Wann heißt eine Abbildung $f \in C^1(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ eine Immersion?

3) Eine Immersion $f \colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *winkeltreu* in $p \in U$, wenn zwei beliebige Kurven mit Schnittpunkt $p \in U$ und ihre Bilder in $f(p)$ sich im selben Winkel schneiden. Formulieren Sie dies als eine Bedingung an das Differential von $f$.

**Aufgabe 20 – Windungsfeld (Ph.):**

Wir betrachten das Vektorfeld

$$X \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \quad X(x,y) := \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Auf dem Schlitzgebiet $S := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \colon x \geq 0\}$ besitzt $X$ ein Potential $f(z) = \arg z$. Zeigen Sie :

1) Skizzieren Sie das Vektorfeld $X$ in $\mathbb{C}$ sowie den Graphen von $f = \arg z$ über $\mathbb{C}$.

2) Rechnen Sie auf dem ersten Quadranten $(x > 0, y > 0)$ nach, daß $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$ tatsächlich ein Potential von $X$ ist.

3) Rechnen Sie direkt nach, dass $\operatorname{rot} X = 0$.

## Hausaufgabe 11 – Stereographische Projektion (Ph.):

Die 2-Sphäre ist gegeben durch

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Der Nordpol sei $N := (0, 0, 1)$. Die folgende Abbildung heißt *Stereographische Projektion*:

$$\pi \colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

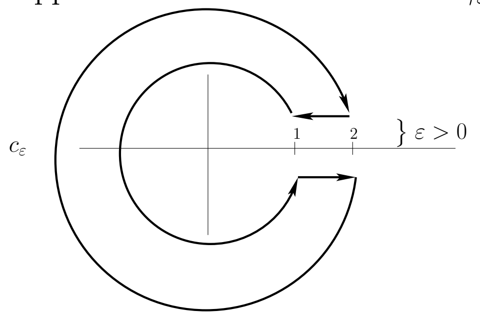
1) Sei $g_x$ die Gerade durch $x \in S^2 \setminus \{N\}$ und den Nordpol $N$. Zeigen Sie: Der Punkt $(\pi(x), 0)$ ist der Schnittpunkt der Äquatorebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ mit der Geraden $g(x)$. Skizzieren Sie!
2) Zeigen Sie: Die Projektion $\pi$ ist bijektiv. Geben Sie die Umkehrfunktion an.
3) (Zusatzaufgabe) Zeigen Sie: $\pi$ ist Immersion und winkeltreu im Sinne von Aufgabe 19.

## Hausaufgabe 12 – Kurvenintegrale:

1) Sei $c_r \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $c_r(t) = re^{it}$ der Kreis vom Radius $r > 0$. Ferner sei das Vektorfeld $X \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ rotationsfrei, d.h. $\partial_1 X_2 = \partial_2 X_1$. Zeigen Sie:

$$\int_{c_1} X \cdot ds = \int_{c_2} X \cdot ds$$

Tipp: Betrachten Sie die Schleife $\gamma_\varepsilon$.




2) Sei $c_h \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $c_h(t) = (\cos t, \sin t, h)$ der Kreis in der horizontalen Ebene $E_h$. Das Vektorfeld $X \colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \colon z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ sei rotationsfrei. Zeigen Sie:

$$\int_{c_0} X \cdot ds = \int_{c_1} X \cdot ds$$