Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
13.11.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

# 5. Übung zu Funktionentheorie

**Aufgabe 15 – Relativ offen (Ph.):**

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen relativ offen sind.

- $\{2008\} \subset \mathbb{N}$.
- $\{z\colon |z| < 1\} \cap \{x + iy \in \mathbb{C}\colon y \geq 0\} \subset \{x + iy \in \mathbb{C}\colon y \geq 0\}$;

**Aufgabe 16 – Zusammenhang (Ph.):**

Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Mengen zusammenhängend sind.

- $A = [-1, 0) \cup (0, 1] \subset \mathbb{R}$.
- Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
- Der Raum $X := \{\text{Doraden}, \text{Schildkröten}\}$ mit der Metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

- Die Menge $C := \{x + iy \in \mathbb{C}\colon y = 0\} \cup \{x + iy \in \mathbb{C}\colon x > 0, \text{ und } y = \frac{1}{x}\}$
- Das Intervall $I := (1, 3) \subset \mathbb{R}$.

**Aufgabe 17 – Wegzusammenhang:**

Seien $X, Y$ metrische Räume.

1) Zeigen Sie : Ist $f\colon X \to Y$ stetig und $X$ zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.
2) Zeigen Sie : Ist eine Menge $Y$ wegzusammenhängend, so ist sie auch zusammenhängend. (Tipp: Indirekter Beweis.)

### Hausaufgabe 9 – Kurven (Ph.):

Gegeben sei ein Quadrat $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \leq x, y \leq 1\}$.

1) Warum muss es in den Eckpunkten $c' = 0$ gelten, um eine Parametrisierung vom Rand $\partial Q$ mit einer differenzierbaren Kurve $c \colon [0, 4] \to \partial Q$ zu bekommen?

2) Geben Sie eine Parametrisierung des Randes von $Q$ mit einer differenzierbaren Kurve $c \colon [0, 4] \to \partial Q$ an.

### Hausaufgabe 10 – Gegenbeispiel:

Zeigen Sie : Die Menge $X = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \colon x > 0\} \cup \{(0, y) \colon -1 \leq y \leq 1\}$ ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend. (Tipp : Indirekter Beweis.)

Somit gilt die Umkehrung der zweiten Aussage in Aufgabe 17 im Allgemeinen nicht.