Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
06.11.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

4. Übung zu Funktionentheorie

Aufgabe 12 – Wiederholung: Stetige Funktionen (Ph.):

1) Definieren Sie Stetigkeit für komplexe Funktionen $f\colon U \to \mathbb{C}$ auf zwei verschiedenen Weisen.
2) Zeigen Sie : Eine komplex differenzierbare Funktion ist stetig.
3) Zeigen Sie : Wenn eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig ist, so ist auch $|f|\colon U \to \mathbb{R}$ stetig.

Aufgabe 13 – Wiederholung: Topologie in $\mathbb{C}$ (Ph.):

1) Zeigen Sie : Die imaginäre Achse $i\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{C}$ abgeschlossen.
2) Zeigen Sie : Der Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ ist kompakt.
3) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie : Die Menge $M := \{z \in \mathbb{C}\colon f(z) \neq 0\}$ ist offen.

Aufgabe 14 – Stetige Funktionen:

Sei $Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $h \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie

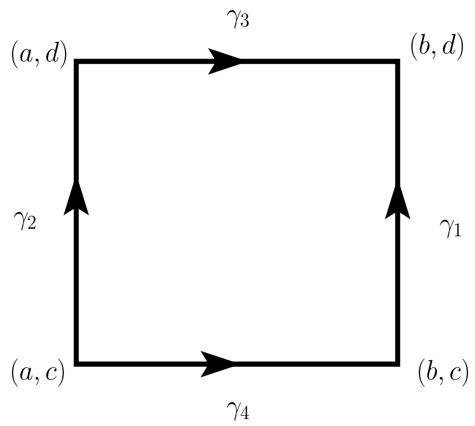
$$\lim_{h\to 0} \int_0^1 Q(z+th)dt = Q(z)$$

Hausaufgabe 7 – Satz von Stokes für ein Rechteck (Ph.):

Seien $f\colon \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein C^1-Vektorfeld und $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \le x \le b, c \le y \le d\}$ mit $R \subset \Omega$. Ferner sei γ der Rand des Rechtecks R, der in positiver Richtung durchläuft. Zeigen Sie :

$$\int_\gamma f \cdot ds = \int_c^d \int_a^b (\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}) dx dy.$$

Tipp:



Hausaufgabe 8 – Gleichmäßige Konvergenz:

1) Finden Sie eine Folge, die lokal gleichmäßig aber nicht gleichmäßig konvergiert.

2) Zeigen Sie : Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, so ist jede auf K lokal gleichmäßig konvergente Folge gleichmäßig konvergent.