Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
30.10.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

3. Übung zu Funktionentheorie

Aufgabe 8 – Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (Ph.):

(1) Schreiben Sie $f(z) = \exp(z)$ in der Form $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ (Eulerformel). Zeigen Sie mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass exp holomorph auf $\mathbb{C}$ ist.

(2) Definieren Sie $\sin z$ und $\cos z$ durch exp und weisen Sie die Holomorphie auf $\mathbb{C}$ nach.

Aufgabe 9 – Holomorphe Funktionen (Ph.):

Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $f(z) = x^3y^2 + ix^2y^3$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar? Gibt es ein Gebiet $U \subset \mathbb{C}$, auf dem f holomorph ist?

Aufgabe 10 – Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (Ph.):

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ und $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Ferner sei die Funktion f komplex differenzierbar in einem Punkt $z \in U$. Leiten Sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in z aus dem Differenzenquotienten her.

Aufgabe 11 – Wiederholung, Kurvenintegral:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie :

$$\int_a^b |f(x)|dx \geq \Big| \int_a^b f(x)dx \Big|$$

(Tipp : Sie dürfen annehmen, $|f|$ ist integrierbar.)

Hausaufgabe 5 – Reguläre Wege (Ph.)(4P):

Ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt regulär, falls $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ ist.

(1) Skizzieren Sie die folgenden Wege in $\mathbb{R}^2$ jeweils für $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$ und $a = 2$

$$\gamma_a(t) = \begin{pmatrix} (1 + a\cos t)\cos t \\ (1 + a\cos t)\sin t \end{pmatrix} \quad \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

(2) Welche Wege in (1) sind regulär? Bestimmen Sie jeweils die Geschwindigkeitsvektoren der Wege und gegebenenfalls die singulären Punkte, d.h. die Punkte $\gamma(t)$ mit $\gamma'(t) = 0$.

(3) **(Neilsche Parabel)** Sei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 - x^3 = 0\}$. Skizzieren Sie K und geben Sie eine Parametrisierung dieser Kurve an. Kann man die Kurve differenzierbar parametrisieren? Kann man die Kurve regulär parametrisieren?

Hausaufgabe 6 – Potenzreihe:

Gesucht ist ein Beispiel einer Folge von Reihen $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Koeffizienten erfüllen $\lim_{k\to\infty} a_n^k \to 1$ für jedes n.

(2) Die Reihe f_k konvergiert nicht gegen die geometrische Reihe, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n \nrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.