Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
23.10.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

2. Übung zu Funktionentheorie

Aufgabe 5 – Wiederholung, Taylorreihe (Ph.):

Gegeben sei die Funktionen

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$$
$$f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

(1) Skizzieren Sie die Funktionen f_1, f_2, f_3.

(2) Welche der Funktionen f_1, f_2, f_3 lässt sich in einer Umgebung U um $x = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln? Wie groß kann man U jeweils wählen?

Aufgabe 6 – Exponentialfunktion und Logarithmus (Ph.):

Gegeben sei die holomorphe Funktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(1) Sei $U := \{z \in \mathbb{C}\colon -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$. Skizzieren Sie U und $\exp(U)$.

(2) Sei $L_a := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z = a\}$ und $L_b := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z = b\}$.
Skizzieren Sie L_a, L_b, $\exp(L_a)$ und $\exp(L_b)$.
Welchen Winkel bilden L_a und L_b? Welchen Winkel bilden $\exp(L_a)$, $\exp(L_b)$?

(3) Geben Sie eine maximale offene zusammenhängende Menge an, auf der exp stetig invertierbar ist.

Aufgabe 7 – Wiederholung, Häufungspunkte:

Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt der Folge (z_k), falls in jeder ε-Umgebung von z unendlich viele Folgenglieder liegen, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists N > m\colon z_N \in B_\varepsilon(z).$$

Konstruieren Sie zu jeder der folgenden Eigenschaften eine Folge (z_k).

(1) Eine Folge (z_k) ohne Häufungspunkt.

(2) Sei $(z_k) \subset D := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$. Die Häufungspunkte von (z_k) sind genau die Punkt von ∂D.

(3) Jede komplexe Zahl ist ein Häufungspunkt von (z_k).

Hausaufgabe 3 – Holomorphe Funktionen (4P) (Ph.):

Sei f eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ und $|f|$ konstant.

(1) Zeigen Sie : $\operatorname{Rang}(f) = 0$.

(2) Zeigen Sie : f ist konstant.

Hausaufgabe 4 – Konforme Abbildungen (4P):

Gegeben sei eine Abbildung

$$\eta\colon \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}, \qquad \eta(z) := \frac{z-i}{z+i}.$$

Sei $H := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ und $D := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$. Wir werden mit den folgenden Schritten zeigen, dass η eine holomorphe Abbildung von der oberen Halbebene H in die offene Kreisscheibe D ist.

(1) Zeigen Sie : η ist holomorph und $\eta(H) \subset D$.

(2) Berechnen Sie die Inverse $\zeta(w)$ für $w \neq 1$.

(3) Zeigen Sie : $\eta(H) = D$. (Tipp : Berechnen Sie $2 \operatorname{Im} z$ für $w \in D$)