Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
29.01.2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14. Übung zu Funktionentheorie

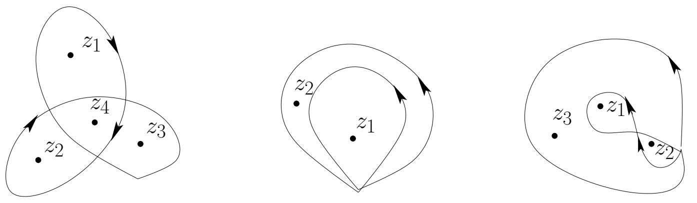
Aufgabe 43 – Wiederholung:

1) Zeigen Sie: Ist f eine ganze Funktion und es gilt $\lim_{z\to\infty} f(z) = c$ für ein $c \in \mathbb{C}$, so ist $f \equiv c$.

2) Zeigen Sie: Für jedes $\varepsilon > 0$ nimmt die Funktion $f\colon B_\varepsilon(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \exp \frac{1}{z}$ jeden Wert aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ unendlich oft an.

Aufgabe 44 – Test:

Bestimmen Sie die Windungszahl folgender Kurven:



c_1 c_2 c_3

Aufgabe 45 – Fourierreihen reell:

In dieser Aufgabe wollen wir die reelle Fourierdarstellung aus der komplexen herleiten. Gegeben sei eine periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(x + 2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, von der wir annehmen, dass sie sich in eine konvergente Fourierreihe mit komplexen Koeffizienten entwickeln läßt:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \quad \text{mit} \quad a_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt.$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

wobei

$$\alpha_0 := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

und

$$\alpha_n := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \qquad \beta_n := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 46 – Residuensatz und elliptische Funktionen (F.):

1) Gegeben seien eine doppelt periodische Funktion f auf dem Fundamentalbereich $Q = \{\lambda v_1 + \mu v_2 \colon 0 \leq \lambda, \mu < 1\}$ mit Polstellen in $z_1, \dots, z_n \in Q$. Zeigen Sie:
$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}_{z_i} f = 0.$$
2) Zeigen Sie: Es gibt keine doppelt periodische Funktion, die auf ihrem Fundamentalbereich nur einen Pol erster Ordnung besitzt.

Aufgabe 47 – Residuensatz:

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral auf der (einfach durchlaufenen) Kurve c.

$$\int_c \frac{1}{z^2 - 1}\, dz$$

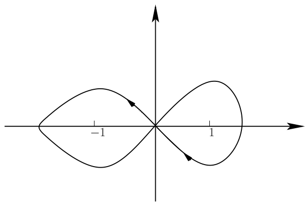


Abbildung 14.1: Figure Acht

Aufgabe 48 – Konstante Funktion (F.):

Sei f eine ganze Funktion. Zeigen Sie, dass f konstant ist, falls eine der folgenden Bedingungen für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt (Tipp: exp oder Hausaufgabe 4):

1) $\operatorname{Im} f(z) > 0$.
2) $\operatorname{Re} f < 0$.
3) $\operatorname{Im} f(z) \leq 0$.

Aufgabe 49 – Konvergenzradius (F.):

Bestimmen Sie ohne Rechnung den Konvergenzradius der Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 für die Funktionen
$$f(z) := \frac{1}{1 + z^4} \quad \text{und} \quad g(z) := \frac{z}{e^z - 1}.$$

Aufgabe 50 – Komplexe Wurzeln (F.):

1) Sei $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie alle möglichen $z \in \mathbb{C}$ an, die der Gleichung $z^n = 1$ genügen. (Tipp: Polarkoordinaten)
2) Wie würden Sie einen Zweig der n-ten Wurzel definieren?
3) Gilt die bekannte Lösungsformel für die Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ auch im Komplexen? Versuchen Sie die Formel herzuleiten. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$.

Wie fängt man einen Löwen in der Wüste?

DIE HILBERTSCHE ODER AXIOMATISCHE METHODE
Man stellt einen Käfig in die Wüste und führt folgendes Axiomensystem ein: Axiom 1: Die Menge der Löwen in der Wüste ist nicht leer. Axiom 2: Sind Löwen in der Wüste, so ist auch ein Löwe im Käfig. Schlussregel: Ist p ein richtiger Satz, und gilt "wenn p, so q", so ist auch q ein richtiger Satz. Satz: Es ist ein Löwe im Käfig.

DIE GEOMETRISCHE METHODE
Man stelle einen zylindrischen Käfig in die Wüste. Fall 1: Der Löwe ist im Käfig. Dieser Fall ist trivial. Fall 2: Der Löwe ist außerhalb des Käfigs. Dann stelle man sich in den Käfig und mache eine Inversion an den Käfig wänden. Auf diese Weise gelangt der Löwe in den Käfig und man selbst nach draussen. Achtung: Bei Anwendung dieser Methode ist dringend darauf zu achten, dass man sich nicht auf den Mittelpunkt des Käfigbodens stellt, da man sonst im Unendlichen verschwindet.

DIE BOLZANO-WEIERSTRASS-METHODE
Wir halbieren die Wüste in Nord-Süd Richtung durch einen Zaun. Dann ist der Löwe entweder in der westlichen oder östlichen Hälfte der Wüste. Wir wollen annehmen, dass er in der westlichen Hälfte ist. Daraufhin halbieren wir diesen westlichen Teil durch einen Zaun in Ost-West Richtung. Der Löwe ist entweder im nördlichen oder im südlichen Teil. Wir nehmen an, er ist im nördlichen. Auf diese Weise fahren wir fort. Der Durchmesser der Teile, die bei dieser Halbiererei entstehen, strebt gegen Null. Auf diese Weise wird der Löwe schließlich von einem Zaun beliebig kleiner Länge eingegrenzt. Achtung: Bei dieser Methode achte man darauf, dass das schöne Fell des Löwen nicht beschädigt wird.