Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
22.01.2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

13. Übung zu Funktionentheorie

Aufgabe 39 – Wiederholung:

1) Gibt es eine analytische Funktion $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ mit $f'(z)=\frac{1}{z}$ für alle $z\neq 0$?
2) Zeigen Sie: Ist $f\colon U\to\mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f^2=\overline{f}$, so ist f konstant.
3) Geben Sie den Real- und Imaginärteil des komplexen Logarithmus an
$$\mathrm{Log}\colon \mathbb{C}\setminus\{z\colon\ \mathrm{Re}\,z\leq 0 \text{und} \,\mathrm{Im}\,z=0\}\to\mathbb{C}.$$
4) Sei $P\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ein Polynom von Grad d und $a\in\mathbb{C}$. Unter welcher Voraussetzung nimmt f den Wert a in d verschiedenen Punkten $z_1,\ldots,z_d$ an?

Aufgabe 40 – Test:

1) Seien $f,g\colon\ \setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. In z_0 besitze f einen Pol der Ordnung n und g einen Pol der Ordnung k und $g(z)\neq 0$ für alle $z\in U\setminus\{z_0\}$. Welche Pole haben die Funktionen $f\pm g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$?
2) Widerspricht die folgende „Identität“ dem Satz von der Eindeutigkeit der Laurententwicklung?
$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{1-z}\\&=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{1-z}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}z^n\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z^n.\end{aligned}$$

Aufgabe 41 – Laurentreihe:

Finden Sie alle Kreis- bzw. Kreisringeum 0, in denen sich die Funktion
$$f(z)=\frac{2-i}{z^2-(2+i)z+2i}$$
in Laurentreihe entwickeln läßt. Geben Sie zwei von diesen Laurentreihen an.

Aufgabe 42 – Klassifizieren der Singularitäten:

Bestimmen und klassifizieren Sie die Singularitäten folgender holomorphen Funktionen.

1) $f(z)=\frac{\cos z-1}{z^2}$.
2) $h(z)=\exp(\frac{2008}{z^2})$.
3) $g(z)=\frac{1}{\sin z}$.

Tipp zu 3): Die Funktion $\varphi(z)=\frac{\sin z}{z}$ hat hebbare Singularität in 0.

Hausaufgabe 25 – Besselfunktion via Laurentreihen (Ph.):

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ besitzt die Funktion $w \mapsto f(w) := \exp(\frac{z}{2}(w - \frac{1}{w}))$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Laurententwicklung

$$f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(z) w^n.$$

Die $\mathcal{J}_n$ heißen *Besselfunktionen* der Ordnung n.
Zeigen Sie:

1) $\mathcal{J}_n(-z) = \mathcal{J}_{-n}(z) = (-1)^n \mathcal{J}_n(z)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \mathbb{C}$.
2) $$\mathcal{J}_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt - z \sin t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - z \sin t) dt.$$
3) Die Funktionen $\mathcal{J}_n(z)$ sind analytisch in $\mathbb{C}$. Ihre Taylorentwicklung um den Nullpunkt hat für $n > 0$ die Gestalt
$$\mathcal{J}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{1}{2} z)^{2k+n}}{k!(k+n)!}$$
4) Die Funktionen $\mathcal{J}_n(z)$ erfüllen die Besselsche Differentialgleichung
$$z^2 g''(z) + z g'(z) + (z^2 - n^2) g(z) = 0.$$

Hausaufgabe 26 – Windungszahl (reell):

1) Schreiben Sie das Kurvenintegral der Windungszahl reell, d.h. bestimmen Sie Vektorfelder X und Y auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass $\int_c \frac{1}{z}\, dz = \int X \cdot ds + i \int Y \cdot ds$.
2) Besitzen die Felder X und Y Potentiale auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$? Kennen Sie Y?
3) Gegeben sei ein Polardarstellung $c \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos \vartheta(t) \\ \sin \vartheta(t) \end{pmatrix}$ an und prüfen Sie nun die Rechnung $2\pi i \cdot n(c, 0) = \vartheta(a) - \vartheta(b)$ erneut nach.

Die Elefantenjagd

MATHEMATIKER
jagen Elefanten, indem sie nach Afrika gehen, alles entfernen, was nicht Elefant ist, und ein Element der Restmenge fangen.

ERFAHRENE MATHEMATIKER
werden zunächst versuchen, die Existenz mindestens eines eineindeutigen Elefanten zu beweisen, bevor sie mit Schritt 1 als untergeordneter Übungsaufgabe fortfahren.

MATHEMATIKPROFESSOREN
beweisen die Existenz mindestens eines eineindeutigen Elefanten und überlassen dann das Aufspüren und Einfangen eines tatsächlichen Elefanten ihren Studenten.