Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
15.01.2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12. Übung zu Funktionentheorie

Aufgabe 36 – Wiederholung:

1) *Potenzen*: Wir möchten die reelle Formel $a^b = \exp(b \log a)$ verallgemeinern. Allerdings ist der Logarithmus im Komplexen nicht eindeutig bestimmt. Daher ist für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$ der Ausdruck

$$a^b := \{\exp(b\ell) : \ell \in \mathbb{C}, \exp \ell = a\}$$

eine Menge. Bestimmen Sie die Menge i^i.

2) Zeigen Sie: Ist f eine ganze Funktion und gibt es positive Konstanten c, R und $n \in \mathbb{N}$, sodass $|f(z)| \leq c|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ gilt, so ist f ein Polynom von höchstens n-tem Grade.
Tipp: Sehen Sie sich die Koeffizienten der Taylorreihe an.

Aufgabe 37 – Gebietstreue impliziert Maximumprinzip:

Zeigen Sie: Aus dem Satz über die Gebietstreue folgt das Maximumprinzip.

Aufgabe 38 – Anwendung des Hebbarkeitssatzes:

Es seien f und g ganze Funktionen, wobei g eine diskrete Nullstellenmenge habe. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte

$$|f(z)| \leq |g(z)|.$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen f und g?

Hausaufgabe 23 – Nicht analytisch fortsetzbare Potenzreihe (Ph.):

Gegeben sei

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$$

Zeigen Sie:

1) Die Reihe hat Konvergenzradius 1.

2) Es gibt kein Gebiet $U \subset \mathbb{C}$, das $B_1(0)$ echt enthält und auf das sich die Funktion f holomorph fortsetzen läßt.
Tipp: Betrachten Sie f auf Ursprungsstrahlen mit rationalem Winkel.

Hausaufgabe 24 – Schwarzsches Lemma:

Es sei $B = B_1(0)$ die offene Einheitskreisscheibe.

1) Behauptung: Wenn $f\colon B \to B$ holomorph ist mit $f(0) = 0$, so gilt $|f(z)| \leq |z|$.
Tipp: $g(z) := \frac{f(z)}{z}$, Hebbarkeitssatz, Maximumprinzip.

2) Diskutieren Sie nun den Gleichheitsfall $|g(z)| = 1$, um zu zeigen: Gilt zusätzlich $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in D - \{0\}$, oder $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung um 0, d.h. $f(z) = e^{i\vartheta} z$ für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$.