Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
08.01.2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11. Übung zu Funktionentheorie

Aufgabe 33 – Wiederholungsfragen:

1) Geben Sie $f(z) = \exp(z^2)$ in der Form $f = u + iv$ an.

2) Ist die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ winkeltreu?

3) Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, $a_k \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Ist z eine Nullstelle von P, so auch $\overline{z}$. Was folgt daraus, wenn die Ordnung von P ungerade ist?

4) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt f eine Stammfunktion? Geben Sie Beweis oder Gegenbeispiel an.

Aufgabe 34 – Test:

Beweisen Sie oder widerlegen Sie die Aussagen 1)-2):

1) Jede holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to B_1(0)$ ist konstant.

2) Jedes Polynom P über $\mathbb{C}$ mit $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, ist konstant.

3) Geben Sie ein unbeschränktes Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ mit $U \neq \emptyset$ an, so dass das Maximumsprinzip für exp nicht gilt, d.h.

$$\sup_{z\in U} |e^z| > \sup_{z \in \partial U} |e^z|.$$

4) Bestimmen Sie das Betragsmaximum auf $\overline{B}_1(0)$ für

$$f(z) = \exp(z^2), \quad g(z) = 3 - |z|^2, \quad h(z) = z^2 + z - 1.$$

Aufgabe 35 – Periodische Funktionen:

Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt *periodisch*, wenn es $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt mit $f(z+v) = f(z)$. Ist die Menge solcher v in einem reell eindimensionalen Unterraum von $\mathbb{C}$ enthalten, so heißt f einfach periodisch, wenn sie ganz $\mathbb{C}$ aufspannt so ist f doppelt periodisch.

1) Geben Sie drei verschiedene einfach periodische Funktionen an. Was ist ihre Periode, also dasjenige $v \neq 0$ mit $f(z+v) = f(z)$, für das $|v|$ minimal ist?

2) Definieren Sie die Tangensfunktion, $\tan z\colon U \to \mathbb{C}$. Warum ist tan periodisch und was ist die Periode? Bestimmen Sie ohne Rechnen den Konvergenzradius der Taylorreihe von tan um 0.

3) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ doppelt periodisch und holomorph. Zeigen Sie: f ist konstant.

Hausaufgabe 21 – Analytische Funktionen (Ph.):

1) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:
   Es gibt eine analytische Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

2) Geben Sie eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die diese Bedingung erfüllt.

Hausaufgabe 22 – Der Identitätssatz:

Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion derart, dass für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

von f um z_0 mindestens ein Koeffizient $a_n = a_n(z_0) = f^{(n)}(z_0)$ verschindet.
Zeigen Sie: f ist ein Polynom.

Tipp: Betrachten Sie die Mengen

$$M_n := \{z_0 \in \overline{B_1(0)} \colon f^{(n)}(z) = 0\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$