Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
18.12.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Übung zu Funktionentheorie

Aufgabe 30 – Test:

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1) Gegeben seien zwei Potenzreihen

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{und} \quad Q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Besitzt die Gleichung $P(z) = Q(z)$ unendlich viele verschiedene Lösungen $z \in \mathbb{C}$, so ist $P \equiv Q$ und damit $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

2) Glatte Funktionen sind analytisch.

3) Analytische Funktionen sind glatt.

4) Es gibt eine analytische Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit

$$f^{(n)}(0) = (n!)^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

5) Es gibt eine analytische Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{n^2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 31 – Diskrete Mengen:

Zeigen Sie: Diskrete Teilmengen einer kompakten Menge sind endlich, d.h. ist $M \subset K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ mit K kompakt, M diskret und U offen, so ist M endlich.

Aufgabe 32 – Diskrete Mengen:

1) Zeigen Sie: Eine Menge $M \subset U \subset \mathbb{R}^n$ ist diskret genau dann, wenn M keine Häufungspunkte in U besitzt.

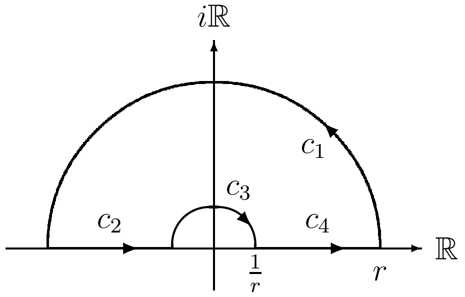
2) Ist die Menge $\mathbb{Q}$ diskret in $\mathbb{R}$? Ist die Menge $M := \{e^{it} : t \in \mathbb{Z}\}$ diskret in $\mathbb{C}$?

Hausaufgabe 19 – Uneigentliche Integrale (Ph.):

Ziel der Aufgabe ist die Berechnung des reellen uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx := \lim_{r\to\infty}\int_{\frac{1}{r}}^{r} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Es sei : $c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ die skizzierte Schleife.



1) Skizzieren Sie den Graphen von $\frac{\sin x}{x} : (0,\infty] \to \mathbb{R}$.

2) Zeigen Sie: $\int_c \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$.

3) Zeigen Sie: $|\int_{c_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz| \leq \int_{c_1} \frac{|e^{iz}|}{|z|} \cdot |dz| \leq \frac{\pi}{r}$.
   Dazu parametrisieren Sie c_1 durch $r(\cos t + i\sin t)$. Benutzen Sie die Abschätzung $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$ auf dem Intervall $[0,\pi/2]$.

4) Geben Sie eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion g als Potenzreihe an, sodass für $z \neq 0$ gilt $\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + g(z)$. Mit der Stetigkeit von g können Sie nun

$$\lim_{r\to\infty}\int_{c_3} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -\pi i$$

   beweisen.

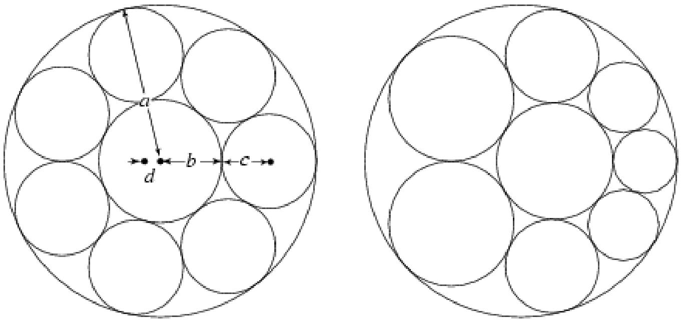
5) Fassen Sie $\int_{c_2}$ und $\int_{c_4}$ zusammen, um unter Benutzung der bisherigen Schritte den gesuchten Wert des uneigentlichen Integrals anzugeben.

6) Existiert auch

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\frac{1}{r}}^{r} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx\,?$$

Hausaufgabe 20 – Weihnachtsaufgabe: Steinersche Alternative:

Gegeben seien zwei ineinanderliegende, nicht unbedingt konzentrische, Kreise C_1 und C_2 in $\mathbb{C}$. Wir beginnen, den Raum zwischen C_1 und C_2 mit einer Kette von Kreisen zu füllen, sodass jeder Kreis sowohl den vorherigen Kreis wie auch C_1 und C_2 tangential berührt. In dem Fall, dass der letzte Kreis den ersten tangential berührt, sagen wir *die Kette schließt sich*. Die Steinerscher Alternative besagt nun, dass die Frage, ob die Kette sich schließt, unabhängig von der Plazierung des ersten Kreises ist. Bei einer geschlossenen Kette kann man also die Kreise stetig "rotieren" lassen, siehe z.B. `http://mathworld.wolfram.com/SteinerChain.html` .

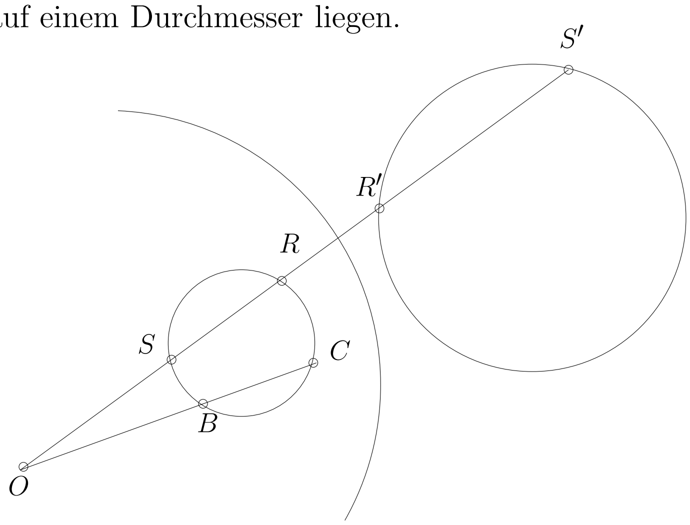


Steiner chain with $n = 7$

In dieser Aufgabe werden wir Schritt für Schritt die Existenz solcher Steinerschen Ketten in einem einfachen Fall beweisen. (Alle Schritte, bis auf 2., lassen sich unmittelbar beantworten.)

1) Betrachten wir die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Skizzieren Sie das Bild einiger Punkte unter dieser Abbildung. Warum nennt man f auch *Inversion am Einheitskreis*?

2) Weisen Sie eine erstaunliche Eigenschaft der Inversion f nach: Sie ist *kreistreu*, d.h. sie bildet jeden Kreis, der nicht durch Ursprung geht, wieder auf einen Kreis ab. Beweisen Sie dies in zwei Schritten: Zuerst zeigen Sie elementargeometrisch, dass in der folgenden Figur die beiden Dreiecke OBR und OSC ähnlich sind, sofern die Punkte BC auf einem Durchmesser liegen.



Daher können Sie $|S||R|$ durch die beiden auf einem Durchmesser fixierten Punkte B und C ausdrücken. Zeigen Sie dann, dass S' ein konstantes Vielfaches von R ist. Folgern Sie, dass das Bild des Kreises auf der linken Seite unter Inversion am angedeuteten Einheitskreis durch Dilatation (also durch Multiplikation mit festem Skalar) aus dem linken Kreis hervorgeht, und daher selbst Kreis ist.

3) Bestimmen Sie Radien $0 < r < R$, sodass im Kreisring $B_R \setminus B_r$ genau 6 Einheitskreise liegen, die einander tangential berühren und tangential an ∂B_R und ∂B_r liegen.

4) Wir betrachten nun die Konfiguration von 3) als eine Steinersche Kette. Verschieben Sie diese Kette in der komplexen Ebene und betrachten Sie das Bild unter Inversion. Warum entsteht (für geeignete Verschiebungen) wieder eine Steinersche Kette, jedoch mit nicht konzentrischen Außenkreisen? Skizzieren Sie ein Bild nach Inversion.

5) Zeigen Sie, dass sich Ihre Steinersche Kette aus 4) schließt, unabhängig von der Plazierung des ersten Kreises.

Wir wünschen Ihnen fröhliche Weihnachten und viele Freude an der Mathematik!