Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
16.10.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1. Übung zu Funktionentheorie

Aufgabe 1 – Wiederholung komplexe Zahlen (Ph.):

(1) Drücken Sie $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ sowie $|z|^2$ durch z und $\bar{z}$ aus.

(2) Sei $z \neq 0$. Geben Sie die Inverse z^{-1} in der Form Real- plus Imaginärteil an.

(3) Deuten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^4$ geometrisch.
Sei $\square := \{z \in \mathbb{C}\colon 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1,\ 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$;
skizzieren Sie das Bild $f(\square)$.

Aufgabe 2 – Komplexe Differenzierbarkeit:

(1) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$. Zeigen Sie mittels Differenzquotienten: f ist differenzierbar.

(2) Folgern Sie daraus, dass alle Polynome differenzierbar sind.

Aufgabe 3 – Konjugation:

Sei $f\colon z \mapsto \overline{z}$ die Konjugation. Wir verstehen f sowohl als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in sich als auch von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

(1) Zeigen Sie: f ist ein Körperautomorphismus.

(2) Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung? Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung?

(3) Bestimmen Sie die Menge der Fixpunkte von f sowohl rechnerisch als auch geometrisch.

Aufgabe 4 – $\mathbb{C}$ als 2×2 reelle Matrizen (Ph.):

Sei $c = a + ib \in \mathbb{C}$ und $f_c\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto cz$.

(1) Zeigen Sie : f_c ist $\mathbb{C}$-linear.

(2) Identifizieren Sie $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ durch $z = x + iy = \binom{x}{y}$. Geben Sie die reelle 2×2 Matrix A_c zu f_c an. Was kann man über die Eigenwerte von f_c sagen?

(3) Für welche $c \in \mathbb{C}$ ist $A_c \in SO(2)$?

Hausaufgabe 1 – Komplexe Differenzierbarkeit (4P) (Ph.):

(1) (1P) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend ist.

(2) (3P) Beweisen Sie: Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, wegzusammenhängend und $f: U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$, so ist f konstant.

Hausaufgabe 2 – Holomorphe Funktionen (4P):

Zeigen Sie, dass $|z|$ nicht holomorph ist.