Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 07/08
09.08.2007

Klausur
„Lineare Algebra I für Physiker“

Name: .... | Studiengang: ....

Vorname: .... | Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punktzahl	9	99	99	99	99	405	
erreichte Punktzahl							

1. Aufgabe(Testfragen) (9 Punkte)

Bitte kreuzen Sie die richtigen Aussagen an. Für eine richtige Bewertung gibt es einen Punkt, ansonsten wird ein Punkt abgezogen. Das Minimum der zu erreichenden Punkte ist 0.

	Wahr	Falsch
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$	☐	☐
Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal.	☐	☐
Jede lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ (V endlich dimensional) mit Ker $\varphi = \{0\}$ ist surjektiv.	☐	☐
Die Vektoren $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ bzgl. des Standardskalarproduktes.	☐	☐
Für eine lineare Abbildung φ ist Bild(φ) ein Untervektorraum.	☐	☐
Die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum.	☐	☐
Für ein festes $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist die Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), p \mapsto p \cdot q$ linear.	☐	☐
Für ein festes $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist die Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), p \mapsto p + q$ linear.	☐	☐
Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0 \right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.	☐	☐

Lösung:

	Wahr	Falsch
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$	☐	☒
Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal.	☒	☐
Jede lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ (V endlich dimensional) mit Ker $\varphi = \{0\}$ ist surjektiv.	☒	☐
Die Vektoren $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ bzgl. des Standardskalarproduktes.	☒	☐
Für eine lineare Abbildung φ ist Bild(φ) ein Untervektorraum.	☒	☐
Die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum.	☒	☐
Für ein festes $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist die Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), p \mapsto p \cdot q$ linear.	☒	☐
Für ein festes $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist die Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), p \mapsto p + q$ linear.	☐	☒
Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0 \right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.	☐	☒

2. Aufgabe(Vektorraum) (6 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeigen Sie, dass für jeden Untervektorraum $U \subset V$ das orthogonale Komplement

$$U^\perp := \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

Lösung: Wir zeigen die drei Eigenschaften eines Untervektorraumes:

$0 \in U^\perp$ Es ist $\langle 0, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$ und somit ist $0 \in U^\perp$.

$v + w \in U^\perp$ Seien $v, w \in U^\perp$. Dann gilt

$$\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle = 0$$

für alle $u \in U$. Somit ist $v + w \in U^\perp$.

$\lambda v \in U^\perp$ Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in U^\perp$. Dann gilt

$$\langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = 0$$

für alle $u \in U$ und somit ist $\lambda v \in U^\perp$.

damit ist $U^\perp$ ein Untervektorraum von V.

3. Aufgabe(Basistransformation) (15 Punkte)

Gegeben sei der Raum der Polynome $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ vom Höchstgrad 2 und Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

a) Geben Sie die Koordinaten des Vektors $p(x) = 2x^2 - 4x + 5$ bzgl. der Standardbasis $\mathcal{B} := \{1, x, x^2\}$ an.

b) Geben Sie die Transformationsmatrix $M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ an, wobei $\mathcal{B}' := \{b_0, b_1, b_2\}$ die Bernsteinbasis mit

$$b_j(x) := \binom{2}{j}(1-x)^{2-j}x^j$$

bezeichnet.

c) Geben Sie die Koordinaten des Vektors p aus a) bzgl. der Bernsteinbasis $\mathcal{B}'$ an.

Lösung:

a) Die Koordinaten lauten

$$p = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

b) Wir rechnen zunächst die Bernsteinpolynome aus. Es gilt

$$\begin{aligned} b_0(x) &= 1 - 2x + x^2 \\ b_1(x) &= 2x - 2x^2 \\ b_2(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Wir stellen nun die Basisvektoren der Standardbasis $\mathcal{B}$ als Linearkombination der Bernsteinbasis $\mathcal{B}'$ dar und erhalten

$$\begin{aligned} x^2 &= b_2 \\ x &= \frac{1}{2}b_1 + b_2 \\ 1 &= b_0 + b_1 + b_2. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Transformationsmatrix

$$M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Es gilt

$$[p]_{\mathcal{B}'} = M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

4. Aufgabe(Orthonormalbasis) (6 Punkte)

Gegeben sei der Untervektorraum

$$U := \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Lösung: Wir überprüfen zunächst die lineare Unabhängigkeit der Vektoren. Dazu lösen wir das Gleichungssystem

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten als Lösung $\lambda_1 = -4\lambda_2$ und $\lambda_3 = -3\lambda_2$, d.h. die Vektoren sind linear abhängig.

Da sie offensichtlich paarweise linear unabhängig sind, bilden zwei Vektoren eine Basis. Wir wählen o.B.d.A. die ersten beiden.

Diese spannen nun einen 2-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ auf. Da beide Vektoren in der ersten Koordinate eine 0 stehen haben, spannen sie die x_2x_3-Ebene in $\mathbb{R}^3$ auf. Für diese ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis.

5. Aufgabe(Symmetrien) (9 Punkte)

Geben Sie alle Matrizen (ohne die Identität) bzgl. der Standardbasis an, die die folgenden Objekte in sich selbst überführen. Der Ursprung ist dabei geeigent zu wählen.

a) Z b) X c) ○

Lösung:

a) Die einzige Symmetrie neben der Identität ist eine 180° Drehung. Deren Matrix lautet

$$\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Neben der 180° Drehung wie in Aufgabe a) kommen hier noch Spiegelungen an der Waagrechten und Senkrechten durch den Mittelpunkt hinzu, d.h. die Matrizen lauten

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Hier sind alle Drehungen und alles Spiegelungen an Geraden durch den Ursprung Symmetrien. Alle Drehungen sind

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{für } \alpha \in (0, 2\pi).$$

Die Spiegelung an einer Ursprungsgeraden mit Neigungswinkel α lautet

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{für } \alpha \in [0, \pi).$$