Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 07/08
09.08.2007

Klausur „Lineare Algebra I für Physiker“

Name: .... | Studiengang: ....

Vorname: .... | Semester: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punktzahl	9	6	15	6	9	45	
erreichte Punktzahl							

1. Aufgabe(Testfragen) (9 Punkte)

Bitte kreuzen Sie die richtigen Aussagen an. Für eine richtige Bewertung gibt es einen Punkt, ansonsten wird ein Punkt abgezogen. Das Minimum der zu erreichenden Punkte ist 0.

	Wahr	Falsch
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$	□	□
Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal.	□	□
Jede lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ (V endlich dimensional) mit Ker $\varphi = \{0\}$ ist surjektiv.	□	□
Die Vektoren $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ bzgl. des Standardskalarproduktes.	□	□
Für eine lineare Abbildung φ ist Bild(φ) ein Untervektorraum.	□	□
Die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum.	□	□
Für jedes feste $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist die Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), p \mapsto p \cdot q$ linear.	□	□
Für jedes feste $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist die Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), p \mapsto p + q$ linear.	□	□
Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0 \right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.	□	□

2. Aufgabe(Vektorraum) (6 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeigen Sie, dass für jeden Untervektorraum $U \subset V$ das orthogonale Komplement

$$U^{\perp} := \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

3. Aufgabe(Basistransformation) (15 Punkte)

Gegeben sei der Raum der Polynome $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ vom Höchstgrad 2 und Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

a) Geben Sie die Koordinaten des Vektors $p(x) = 2x^2 - 4x + 5$ bzgl. der Standardbasis $\mathcal{B} := \{1, x, x^2\}$ an.

b) Geben Sie die Transformationsmatrix $M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ an, wobei $\mathcal{B}' := \{b_0, b_1, b_2\}$ die Bernsteinbasis mit

$$b_j(x) := \binom{2}{j}(1-x)^{2-j}x^j$$

bezeichnet.

c) Geben Sie die Koordinaten des Vektors p aus a) bzgl. der Bernsteinbasis $\mathcal{B}'$ an.

4. Aufgabe(Orthonormalbasis) (6 Punkte)

Gegeben sei der Untervektorraum

$$U := \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

5. Aufgabe(Symmetrien) (9 Punkte)

Geben Sie alle Matrizen (ohne die Identität) bzgl. der Standardbasis an, die die folgenden Objekte in sich selbst überführen. Der Ursprung ist dabei geeignet zu wählen.

a) Z   b) X   c)