Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
24./25.01.2008

7. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G20 (Matrizenkalkül)

Bilden Sie alle möglichen Matrizenprodukte der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4i & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 7 & -1i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1i & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die möglichen Produkte sind

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -4i & 6 \\ 4 & -8i & 12 \\ 6 & -12i & 18 \end{pmatrix}, \quad BA = 20 - 8i, \quad BC = \begin{pmatrix} -6-24i & 2 \end{pmatrix},$$

$$DA = \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \\ -4 \\ -2i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DC = \begin{pmatrix} -3 & 3i \\ 7 & -1i \\ 1-2i & -3 \\ -7i & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G21 (Lineare Abbildungen und Matrizen)

Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie, falls möglich, Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^2$ an, sodass M die Drehung um 90° darstellt.

b) Geben Sie, falls möglich, Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^2$ an, sodass M die Projektion auf die x-Achse darstellt.

Lösung:

a) Da lineare Abbildungen eindeutig durch die Angabe der Bilder der Basisvektoren festgelegt sind, bestimmen wir nun Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$, die uns eine Drehung um 90°

liefern. Wir wählen die kanonische Basis als $\mathcal{B}$, d.h. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Damit wir eine 90° Drehung erhalten muss gelten

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}. \tag{1}$$

Multiplizieren wir die linken Seiten aus, so erhalten wir

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. der erste Basisvektor der Urbildbasis $\mathcal{B}$ wird auf den ersten Basisvektor der Bildbasis $\mathcal{B}'$ abgebildet und der zweite Vektor der Urbildbasis $\mathcal{B}$ wird auf den zweiten Basisvektor der Bildbasis $\mathcal{B}'$ abgebildet.
Zusammen mit Gleichung (**??**) ergibt sich somit $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Es ist nicht möglich zwei Basen anzugeben, sodass M die Projektion auf die x-Achse darstellt. Wählen wir uns eine beliebige Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, so ist $Mv_1 = v_1$ und $Mv_2 = v_2$. Diese beiden Vektoren sind linear unabhängig (Überlegen Sie sich, dass lineare Unabhängigkeit nicht von der Basis abhängt).

Somit enthält das Bild der linearen Abbildung, die von M induziert wird zwei linear unabhägige Vektoren und ist somit 2-dimensional.
Das Bild der Projektion auf die x-Achse ist jedoch nur 1-dimensional.

Aufgabe G22 (Abbildungsmatrix eines Funktionals)
Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} I : \mathcal{P}_4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \int_0^1 p(x)\, dx. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von I bzgl. der Basen $\mathcal{B} = \{x^j : j = 0, 1, \ldots, 4\}$ von $\mathcal{P}_4$ und $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{60}\}$ von $\mathbb{R}$.

Lösung: Wir bestimmen die Bilder der Basisvektoren x^j. Es gilt

$$\begin{aligned} I(x^0) &= \int_0^1 1\, dx = 1 \\ I(x^1) &= \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} \\ I(x^2) &= \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3} \\ I(x^3) &= \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4} \\ I(x^4) &= \int_0^1 x^4\, dx = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Diese Vektoren stellen wir nun in der Basis $\mathcal{B}'$ dar. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= 60 \cdot \frac{1}{60} \\ \frac{1}{2} &= 30 \cdot \frac{1}{60} \\ \frac{1}{3} &= 20 \cdot \frac{1}{60} \\ \frac{1}{4} &= 15 \cdot \frac{1}{60} \\ \frac{1}{5} &= 12 \cdot \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Abbildungsmatrix

$$M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H20 (Abbildungsmatrizen (4 Punkte))

Geben Sie zu den folgenden linearen Abbildungen $T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ und die Abbildungsmatrix $M_{T_i}^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ an:

a) Die orthogonale Projektion T_1 auf den Unterraum $W = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Die orthogonale Projektion T_2 auf den Unterraum $W^\perp$.

c) Bestimmen Sie $T_1 + T_2$. Was müssen Sie beachten? Was fällt ihnen auf? Erklären Sie ihre Beobachtung.

Hinweis: Sie können die Basis $\mathcal{B}$ so wählen, dass die Matrizen $M_{T_i}^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonal sind.

Lösung:

a) Wir haben die freie Wahl einer Basis. Wir wissen, dass eine lineare Abbildung durch die Angabe der Bilder der Basisvektoren festgelegt ist. Demnach wählen wir Basisvektoren, deren Bilder wir direkt erkennen können. Als Basisvektoren wählen wir zunächst

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen zuerst, ob v_1 und v_2 linear unabhängig sind. Betrachten wir die erste Koordinate, so gilt $v_1 = -1 v_2$. In der zweiten Koordinate erhalten wir $v_1 = \frac{1}{2} v_2$. Demnach sind v_1 und v_2 linear unabhängig.

Als dritten Basisvektoren wählen wir $v_3 := v_1 \times v_2$, d.h. es ist $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$. Da v_1 und v_2 in W sind und die Projektion eingeschränkt auf W die Identität ist, ergibt sich $T_1(v_1) = v_1$ und $T_1(v_2) = v_2$.

Ausserdem steht v_3 senkrecht auf W, sodass $T_1(v_3) = 0$ ist. Somit erhalten wir die Abbildungsmatrix

$$M_{T_1}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wir wählen dieselbe Basis $\mathcal{B}$ wie in a). Die orthogonle Projektion auf $W^\perp$ bildet Vektoren, die senkrecht auf $W^\perp$ stehen auf 0 ab.
Die Vektoren, die senkrecht auf $W^\perp$ stehen liegen in W. D.h. es ist $T_2(v_1) = 0$ und $T_2(v_2) = 0$.
Da der Vektor v_3 senkrecht zu v_1 und v_2 ist, ist $v_3 \in W^\perp$. Somit ist $T_2(v_3) = v_3$. Es ergibt sich die Abbildungsmatrix

$$M_{T_2}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Wir müssen zunächst beachten, dass die Matrizen T_1 und T_2 bzgl. derselben Basis dargestellt sind. Hier ist dies der Fall und somit ergibt sich

$$T_1 + T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit induziert $T_1 + T_2$ die identische Abbildung. Die Abbildungen T_1 und T_2 entsprechen der orthogonalen Zerlegung des Vektorraumes. Der Satz von der Orthogonalprojektion besagt, dass ein Vektorraum V die direkte Summe eines abgeschlossenen Vektorraumes W und dessen orthogonalen Komplements $W^\perp$ ist. D.h. man kann jeden Vektor $v \in V$ in in einen orthogonalen Teil $v^\perp \in W^\perp$ und einen parallelen Teil $v^p \in W$ zerlegen. Die direkte Summe besagt sogar, dass diese Zerlegung eindeutig ist.

Die Projektionen T_1 und T_2 liefern gerade diese Zerlegung, d.h. $v^p := T_1(v)$ und $v^\perp := T_2(v)$. Da $v = v^p + v^\perp$ gilt, muss

$$v = v^p + v^\perp = T_1(v) + T_2(v) = (T_1 + T_2)(v)$$

sein, d.h. $T_1 + T_2 = E$. Dies bestätigt unsere Rechnung.

Aufgabe H21 ((Bernstein)Polynome (4 Punkte))

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} D : \mathcal{P}_n &\longrightarrow \mathcal{P}_n \\ p &\longmapsto p' \end{aligned}$$

auf dem Raum $\mathcal{P}_n$ der Polynome vom Höchstgrad n.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von D bzgl. der Standardbasis $\mathcal{B} = \{x^j : j = 0, \ldots, n\}$.

b) Zeigen Sie, dass die Polynome

$$b_k(t) := \binom{3}{k}(1-t)^{3-k}t^k \quad \text{für } k = 0,1,2,3$$

ein Basis von $\mathcal{P}_3$ bilden (Die Polynome b_k heißen Bernsteinpolynome vom Grad 3).

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}' = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$.

Lösung:

a) Wir bestimmen die Bilder der Basisvektoren. Es ist $D(x^j) = jx^{j-1}$. Das heisst der Basisvektor v_j wird durch D auf $D(v_j) = jv_{j-1}$ abgebildet (Hierbei ist $v_{-1} = 0$). Demnach ist die Abbildungsmatrix

$$M_D^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wir multiplizieren zunächst die Polynome b_k aus. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} b_0(t) &= 1 - 3t + 3t^2 - t^3 \\ b_1(t) &= 3t - 6t^2 + 3t^3 \\ b_2(t) &= 3t^2 - 3t^3 \\ b_3(t) &= t^3. \end{aligned}$$

Um die lineare Unabhängigkeit zu überprüfen bestimmen wir die Lösungen der Gleichung

$$\lambda_0 b_0 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0 b_0 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 \\ &= \lambda_0(1 - 3t + 3t^2 - t^3) + \lambda_1(3t - 6t^2 + 3t^3) + \lambda_2(3t^2 - 3t^3) + \lambda_3 t^3 \\ &= 1\lambda_0 + t(-3\lambda_0 + 3\lambda_1) + t^2(3\lambda_0 - 6\lambda_1 + 3\lambda_2) + t^3(-\lambda_0 + 3\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0 \\ -3\lambda_0 + 3\lambda_1 &= 0 \\ 3\lambda_0 - 6\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_0 + 3\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses hat die eindeutge Lösung $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, sodass die Vektoren $b_0, \ldots, b_3$ linear unabhängig sind.

c) Wir bestimmen die Bilder der Basisvektoren $b_0, \dots, b_3$. Es ist

$$\begin{aligned} D(b_0) &= -3 + 6t - 3t^2 \\ D(b_1) &= 3 - 12t + 9t^2 \\ D(b_2) &= 6t - 9t^2 \\ D(b_3) &= 3t^2. \end{aligned}$$

Nun müssen wir diese Polynome als Linearkombination der Basisvektoren $b_0, \dots, b_3$ darstellen. Es ergeben sich die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} D(b_0) &= -3b_0 - b_1 \\ D(b_1) &= 3b_0 - b_1 - 2b_2 \\ D(b_2) &= 2b_1 + b_2 - 3b_3 \\ D(b_3) &= b_2 + 3b_3 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Abbildungsmatrix

$$M_D^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H22 (Matrizenkalkül (4 Punkte))

Gegeben seien die Matrizen $A = (\alpha_{ij})_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B = (\beta_{ij})_{ij} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ und $C = (\gamma_{ij})_{ij} \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.

a) Zeigen Sie, dass $(A \cdot B)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jk}$ ist.

b) Zeigen Sie das Assoziativgesetz $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Lösung:

a) Wir wissen, dass $A \cdot B$ die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\varphi_A \circ \varphi_B$ ist (Hierbei ist φ_A die von A induzierte lineare Abbildung). Um die Abbildungsmatrix von $\varphi_A \circ \varphi_B$ zu bestimmen, berechnen wir die Bilder der Basisvektoren $v_1, \dots, v_p$ von $\mathbb{K}^p$. Wir bezeichenen mit $w_1, \dots, w_n$ die Basis von $\mathbb{K}^n$ und mit $u_1, \dots, u_m$ die Basis von $\mathbb{K}^m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (A \cdot B)(v_k) = A(Bv_k) &= A\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} w_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} A(w_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \beta_{jk}\alpha_{ij} u_i. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk}\alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jk}.$$

b) Wir zeigen, dass $A \cdot (B \cdot C)$ und $(A \cdot B) \cdot C$ dieselben linearen Abbildungen induzieren, indem wir nachrechnen, dass die Bilder der Basisvektoren identisch sind. Wir bezeichnen die Basen wie oben und zusätzlich mit $z_1, \ldots, z_q$ die Basis von $\mathbb{K}^q$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
(A \cdot (B \cdot C))(z_k) &= A \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} (B \cdot C)_{jk} w_j \right) \\
&\overset{a)}{=} A \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \beta_{ji}\gamma_{ik} w_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \beta_{ji}\gamma_{ik} A(w_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \beta_{ji}\gamma_{ik} \sum_{l=1}^{m} \alpha_{lj} u_l. \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \sum_{l=1}^{m} \beta_{ji}\gamma_{ik}\alpha_{lj} u_l.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
((A \cdot B) \cdot C)(z_k) &= (A \cdot B) \left(\sum_{i=1}^{p} \gamma_{ik} v_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \gamma_{ik} (A \cdot B)(v_i) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \gamma_{ik} \sum_{l=1}^{m} (A \cdot B)_{li} u_l \\
&\overset{a)}{=} \sum_{i=1}^{p} \gamma_{ik} \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{lj}\beta_{ji} u_l \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ik}\alpha_{lj}\beta_{ji} u_l.
\end{aligned}$$

Da alle Summen endlich sind und die Multiplikation in $\mathbb{K}$ kommutiert sehen wir, dass die Bilder der Basisvektoren identisch sind. Somit ist $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.