Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
10./11.01.2008

6. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Kern, Bild, Rang und Orthogonalität)

Gegeben sei eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Ist φ injektiv, so ist $\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$.
- ☐ Ist Ker $\varphi = \{0\}$, so ist φ ein Isomorphismus.
- ☐ Die orthogonale Projektion in $\mathbb{R}^2$ auf eine Ursprungsgerade hat Rang 2.
- ☐ Orthogonale Vektoren werden durch lineare Abbildungen auf orthogonale Vektoren abgebildet.
- ☐ Gilt $\dim W = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$, so ist φ surjektiv.
- ☐ Jede surjektive lineare Abbildung eines endlichdimensionalen Vektorraumes in sich selbst ist ein Isomorphismus.
- ☐ Für $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2, (z_1, z_2, z_3)^t \mapsto (z_1 - z_3, z_2 - z_3)^t$ ist $\varphi^{-1}((i, -i)^t) = \{(z_1, z_2, z_3)^t \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 = 2i\}$.

Lösung:

- ☒ Ist φ injektiv, so ist $\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$.
- ☐ Ist Ker $\varphi = \{0\}$, so ist φ ein Isomorphismus.
- ☐ Die orthogonale Projektion in $\mathbb{R}^2$ auf eine Ursprungsgerade hat Rang 2.
- ☐ Orthogonale Vektoren werden durch lineare Abbildungen auf orthogonale Vektoren abgebildet.
- ☒ Gilt $\dim W = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$, so ist φ surjektiv.
- ☒ Jede surjektive lineare Abbildung eines endlichdimensionalen Vektorraumes in sich selbst ist ein Isomorphismus.
- ☐ Für $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2, (z_1, z_2, z_3)^t \mapsto (z_1 - z_3, z_2 - z_3)^t$ ist $\varphi^{-1}((i, -i)^t) = \{(z_1, z_2, z_3)^t \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 = 2i\}$.

Aufgabe G18 (Fourierreihen)

Gegeben sei der Vektorraum $V = C([0, 2\pi])$ der 2π-periodischen, stetigen Funktionen und der Vektor

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

in V.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten (d.h. die Fourierkoeffizienten) von f bzgl. der Orthonormalbasis $e_0, e_1, \ldots$ aus Beispiel 2.23 im Skript.

b) Bestimmen Sie eine Funktion $0 \neq g \in V$, die senkrecht zu f ist.

c) Zeichnen Sie die Graphen von f, g und $f \cdot g$. Was fällt Ihnen auf?

Lösung:

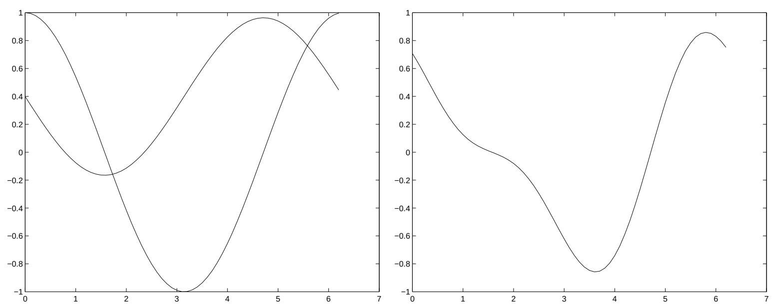
a) Wir stellen die Funktion f als Linearkombination der Basiselemente $e_0, e_1, \ldots$ dar, d.h.

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e_i.$$

Koeffizientenvergleich ergibt $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -1$ und ansonsten $\lambda_i = 0$.

b) Eine Funktion g ist senkrecht zu f, wenn $\langle g, f \rangle = 0$ ist. Da f eine endliche Linearkombination von Basisvektoren einer ONB ist, steht jeder Basisvektor senkrecht auf f, dessen Koordinate 0 ist. Zum Beispiel der Vektor $e_2 = \cos(x)$.

c) Auf der linken Seite sehen wir die Funktionen g und f und auf der rechten Seite die Funktion $f \cdot g$.



Wir erkennen an der rechten Graphik, dass $\int_0^{2\pi} fg \; dx = 0$ ist.

Aufgabe G19 (Skalarprodukt)

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Wir definieren für zwei Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ das Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle_a := 2v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_1 + 4v_2w_2.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$, die bzgl. des oben angegebenen Skalarproduktes orthonormal ist und zeichnen Sie die Basisvektoren in ein Koordinatensystem ein.

b) Bestimmen Sie für $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ das Skalarprodukt $\langle u_1, u_2 \rangle_a$ mit Hilfe des Standardskalarproduktes von $\mathbb{R}^2$.

c) Zeigen Sie, dass sich das Skalarprodukt zweier allgemeiner Vektoren mit Hilfe des Standardskalarproduktes bestimmen lässt.

Lösung:

a) Wir bestimmen zunächst einen beliebigen Einheitsvektor v. Für diesen muss gelten $\langle v, v\rangle_a = 1$, d.h.

$$\langle v, v\rangle_a = 2v_1^2 + 2v_1v_2 + 4v_2^2 = 1.$$

Wählen wir $v_1 = 0$, so ergibt sich $4v_2^2 = 1$, d.h. $v_2 = \frac{1}{2}$. Nun bestimmen wir einen Vektor w, der senkrecht auf v steht, d.h. für den $\langle w, v\rangle_a = 0$ gilt. Wir lösen demnach die Gleichung

$$\left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle_a = \frac{1}{2}w_1 + 2w_2 = 0.$$

Setzen wir $w_1 = 4$ ergibt sich $w_2 = -1$. Dieser Vektor hat die Länge

$$\sqrt{\langle w, w\rangle_a} = \sqrt{28}.$$

Demnach ist die gesuchte ONB

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad w = \frac{1}{\sqrt{28}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Hierzu müssen wir zunächst die Vektoren bzgl. der in a) bestimmten ONB darstellen. Die Koordinaten sind

$$\lambda_1 = \langle v, u_1\rangle_a = 3,\ \mu_1 = \langle w, u_1\rangle = \frac{14}{\sqrt{28}},\ \lambda_2 = \langle v, u_2\rangle = \frac{11}{2},\ \mu_2 = \langle w, u_2\rangle = \frac{-7}{\sqrt{28}}.$$

Demnach ist $u_1 = \lambda_1 v + \mu_1 w$ und $u_2 = \lambda_2 v + \mu_2 w$. Für das Skalarprodukt gilt nun

$$\begin{aligned}
\langle u_1, u_2\rangle_a &= \langle \lambda_1 v + \mu_1 w, \lambda_2 v + \mu_2 w\rangle_a = \langle 3v + \frac{14}{\sqrt{28}}w, \frac{11}{2}v + \frac{-7}{\sqrt{28}}w\rangle_a \\
&= \frac{33}{2}\underbrace{\langle v, v\rangle_a}_{=1} - \frac{21}{\sqrt{28}}\underbrace{\langle v, w\rangle_a}_{=0} + \frac{154}{2\sqrt{28}}\underbrace{\langle w, v\rangle_a}_{=0} - \frac{7}{2}\underbrace{\langle w, w\rangle_a}_{=1} \\
&= \frac{33}{2} - \frac{7}{2} = 13.
\end{aligned}$$

c) Zwei beliebige Vektoren u_1 und u_2 lassen sich als Linearkombination der ONB v, w darstellen, d.h. $u_1 = \lambda_1 v + \mu_1 w$ und $u_2 = \lambda_2 v + \mu_2 w$. Damit gilt

$$\langle u_1, u_2\rangle_a = \langle \lambda_1 v + \mu_1 w, \lambda_2 v + \mu_2 w\rangle_a = \lambda_1\lambda_2\langle v, v\rangle_a + \lambda_1\mu_2\langle v, w\rangle_a + \lambda_2\mu_1\langle w, v\rangle_a + \mu_1\mu_2\langle w, w\rangle_a.$$

Da v, w bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ eine ONB ist, gilt

$$\langle u_1, u_2\rangle_a = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2.$$

Hausübung

Aufgabe H17 (Kern und Bild (4 Punkte))

Bestimmen Sie Kern und Bild zu den folgenden linearen Abbildungen und entscheiden Sie, welche der Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

a) Die orthogonale Projektion $\pi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ auf den Unterraum, der durch die ersten beiden Basisvektoren aufgespannt wird.

b) Der Ableitungsoperator $D : \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ auf dem Raum der Polynome vom Höchstgrad 5.

c) Der Rechtsshift $S : V \to V, (a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, \ldots)$ auf dem Folgenraum $V := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{C}\}$.

Lösung:

a) Alle Vektoren, die ein skalares Vielfaches des dritten Basisvektores sind werden auf 0 abgebildet. Demnach ist Ker $(\pi) = \text{lin}(v)$, wobei v den dritten Basisvektor bezeichnet.
Das Bild von π besteht aus dem Unterraum der von den beiden ersten Basisvektoren aufgespannt wird. Denn dieser ist eine Teilmenge von $\mathbb{C}^3$ und die Projektion ist per Definition auf diesem Unterraum die Identität.

Da der Kern nicht trivial ist, ist π nicht injektiv. Da dies eine Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen ist, folgt hieraus auch nicht surjektiv und nicht bijektiv.

b) Alle konstanten Funktionen werden durch D auf die Nullfunktion abgebildet. Damit ist Ker $(D) = \text{lin}(x \mapsto 1)$. Da durch differenzieren der Grad um 1 gesenkt wird, können keine Funktionen mit Grad 5 erreicht werden. Alle anderen werden erreicht. Demnach ist $\text{Bild}(D) = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

Wieder ist der Kern nicht trivial und D eine Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen und somit D weder injektiv, noch surjektiv noch bijektiv.

c) Aus der Bedingung $S(v) = (0, 0, 0, \ldots)$ folgt direkt $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots$. Demnach wird nur die konstante 0-Folge durch S auf 0 abgebildet und es ist Ker $(S) = \{0\}$. Der Rechtsschift S bildet nur auf Folgen ab, welche an der ersten Stelle eine 0 haben, d.h. $\text{Bild}(S) = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in V : a_0 = 0\}$.

Da der Kern trivial ist, ist S injektiv. Jedoch ist V ein unendlichdimensionaler Verktorraum und wir haben gesehen, das $\text{Bild}(S) \neq V$ ist, d.h. S ist nicht surjektiv. Damit ist S auch nicht bijektiv.

Aufgabe H18 (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren (4 Punkte))

Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2i \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{C}^4$.

a) Sind die Vektoren b_1, b_2, b_3 linear unabhängig?

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $V := \text{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$.

c) Wie lautet das Bild des Vektors $v := \begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ unter der orthogonalen Projektion auf V?

d) Auf welche Weise könnte man nun eine Orthonormalbasis von $V^\perp$ bestimmen?

Lösung:

a) Nein, denn es ist $b_3 = -ib_1 + b_2$.

b) Wir beginnen mit dem Gram-Schmidtschen Verfahren, indem wir Vektor b_1 normalisieren, d.h. wir setzen

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nun bestimmen wir einen Vektor, der senkrecht auf e_1 steht:

$$f_2 = b_2 - \langle b_2, e_1\rangle e_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}(i - 4i + 0 + 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}i\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4i \\ 4 \\ 12 \\ -2i \end{pmatrix}.$$

Normieren ergibt

$$e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 4i \\ 4 \\ 12 \\ -2i \end{pmatrix}.$$

Für den dritten Vektor ergibt sich

$$f_3 = b_3 - \langle b_3, e_1\rangle e_1 - \langle b_3, e_2\rangle e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2i \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(-8i - 4i)\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4i \\ 4 \\ 12 \\ -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Demnach ist $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$ nur 2-dimensional und eine ONB ist

$$e_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{3\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 4i \\ 4 \\ 12 \\ -2i \end{pmatrix}.$$

c) Die orthogonale Projektion ist gegeben durch

$$\pi(v) = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2.$$

Demnach ist das Bild von $v := \begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\pi(v) = \frac{1}{9}i \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2+3i}{90} \begin{pmatrix} 4i \\ 4 \\ 12 \\ -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -2+3i \\ -2+2i \\ 4+6i \\ -1-4i \end{pmatrix}.$$

d) Wir egänzen die ONB von V zu eine Basis von $\mathbb{C}^4$ und führen das Gram-Schmidtsche Orthonotmalisierungsverfahren mit dieser Basis durch.

Aufgabe H19 (Basen und Isomorphismen (4 Punkte))

Gegeben sei ein endlichdimensionaler Vektorraum V, eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V und eine bijektive lineare Abbildung $\varphi : V \to V$.

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ ebenfalls eine Basis von V bilden.

Lösung: Wir zeigen, dass die Vektoren $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ linear unabhängig sind. Dazu bestimmen wir alle Lösungen der Gleichung

$$\lambda_1\varphi(v_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(v_n) = 0.$$

Da φ linear ist, gilt

$$0 = \lambda_1\varphi(v_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(v_n) = \varphi(\lambda_1 v_1) + \ldots + \varphi(\lambda_n v_n) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n).$$

Da φ ein Isomorphismus ist, ist φ insbesondere injektiv, d.h. Ker $(\varphi) = \{0\}$. Weil $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ auf 0 abgebildet wird, ist $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ im Kern enthalten. Dies bedeutet

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0.$$

Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind eine Basis von V, sodass hieraus die Lösung $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ folgt und somit die Vektoren linear unabhängig sind. Sie bilden eine Basis, da $\dim(V) = n$ ist.