Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
13./14.12.2007

5. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Basen, Erzeugendsysteme und Dimension)

Welcher der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ Jedes Erzeugendensystem ist eine Basis.
- ☐ Jede Basis ist ein Erzeugendensystem.
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{C}^3$.
- ☐ $\operatorname{lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ hat Dimension 3.
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^2$ bzgl. des Standardskalarproduktes.

Lösung:

- ☐ Jedes Erzeugendensystem ist eine Basis.
- ☒ Jede Basis ist ein Erzeugendensystem.
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{C}^3$.
- ☐ $\operatorname{lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ hat Dimension 3.
- ☒ $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^2$ bzgl. des Standardskalarproduktes.

Aufgabe G14 (Injektivität und Surjektivität)

Geben Sie zwei Beispiele von Vektorräumen V, W und linearen Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ an mit:

a) φ ist nicht injektiv,

b) φ ist nicht surjektiv.

Lösung: Einfachstes Beispiel für beide Fälle ist die Null-Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V,\ v \longmapsto 0$$

für $V \neq \{0\}$.

Ist $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \mathbb{R}^3$, so ist $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine injektive, aber nicht surjektive lineare Abbildung und die Projektion $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ eine surjektive, aber nicht injektive lineare Abbildung.

Aufgabe G15 (Lineare Abbildungen und Basen)
Gegeben seien die Vektorräume $V := \mathbb{R}^3$ und $W := \mathbb{R}^2$. Sei $\mathbb{R}^3$ mit der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis ausgestattet. Sei weiterhin $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(b_1) := \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Betrachten Sie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ in der Darstellung von $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie das Bild von v unter φ.

b) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ bereits vollständig durch die Angabe der Bilder $\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3)$ der Basisvektoren b_1, b_2, b_3 definiert ist. Geben Sie hierzu das Bild eines beliebigen Vektors $v \in V$ an.

c) Betrachten Sie nun V mit der Standardbasis e_1, e_2, e_3. Geben Sie die Bilder der Standardbasisvektoren unter der linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ an.

Lösung:

a) Das Bild von $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 2b_1 + 0b_2 + b_3$ ist

$$\varphi(v) = \varphi(2b_1 + 0b_2 + b_3) = 2\varphi(b_1) + \varphi(b_3) = 2\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Da $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist können wir jeden Vektor $v \in V$ als eindeutige Linearkombination der Basisvektoren b_1, b_2, b_3 schreiben d.h. $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$.
Da die Abbildung φ linear ist, gilt

$$\varphi(v) = \varphi(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3) = \lambda_1 \varphi(b_1) + \lambda_2 \varphi(b_2) + \lambda_3 \varphi(b_3).$$

Da die Koordinaten λ_i eindeutig sind, ist das Bild von v allein durch die Angabe der Vektoren $\varphi(b_1), \varphi(b_2)$ und $\varphi(b_3)$ bestimmt.

c) Um die Bilder der Standardbasisvektoren anzugeben müssen wir zunächst diese als Linearkombination der Basisvektoren b_1, b_2, b_3 darstellen: Es gilt

$$e_1 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \; e_2 = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \; e_3 = b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Damit ergeben sich für die Bilder der Standardbasisvektoren

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
\varphi(e_2) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
\varphi(e_3) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe G16 (Untervektorräume)

Betrachten Sie den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und den Untervektorraum U, der durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0
\end{aligned}$$

bestimmt ist. Sei W der Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ der durch die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

a) Bestimmen Sie eine Basis für den Untervektorraum $U \cap W$.

b) Bestimmen Sie eine Basis für den Untervektorraum

$$U + W := \{u + w : \; u \in U, \; w \in W\}.$$

Beachten Sie, dass $U + W \neq U \cup W$ ist.

Lösung:

a) Der Gauss-Jordan Algorithmus führt auf das Systen

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
x_3 + x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Damit können wir x_2 und x_4 frei wählen. Wir setzen $x_2 := \lambda$ und $x_4 := \mu$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_1 + \lambda + x_3 + \mu &= 0 \\ x_3 + \mu &= 0. \end{aligned}$$

Aus der unteren Gleichung erhalten wir $x_3 = -\mu$. Einsetzen in die obere Gleichung ergibt $x_1 = -\lambda$. Somit bilden die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von U.

Da die beiden Vektoren, die den Unterraum W aufspannen linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von W. Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist auch $\{e_1, e_2\}$ eine Basis von W. Da nur der Basisvektor u_1 von U mit der Basis von W dargestellt werden kann ist

$$U \cap W = \text{lin}(u_1).$$

Damit ist $\{u_1\}$ eine Basis von $U \cap W$.

b) Wie in a) schon erwähnt gilt für $u_1 = -e_1 + e_2$. Damit gilt für einen beliebigen Vektor $v \in U + W$

$$\begin{aligned} v = u + w &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \\ &= \lambda_1(-e_1 + e_2) + \lambda_2 u_2 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \\ &= \lambda_2 u_2 + (\mu_1 - \lambda_1)e_1 + (\mu_2 + \lambda_1)e_2. \end{aligned}$$

Somit kann jeder Vektor in $U + W$ als Linearkombination der Vektoren $\{u_2, e_1, e_2\}$ dargestellt werden. Da diese Vektoren linear unabhängig sind bilden sie eine Basis von $U + W$.

Hausübung

Aufgabe H13 (Skalarprodukte (4 Punkte))

Entscheiden und begründen Sie, ob die angegebenen Verknüpfungen Skalarprodukte sind:

i) Der Vektorraum der komplexen Folgen $V := \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{C}, x_i\}$ mit der Verknüpfung
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

ii) Der Vektorraum $W := \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{C}, x_i \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i\}$ mit der Verknüpfung
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

iii) Sei $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen Polynome. Für zwei Polynome $p_1(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ und $p_2(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sei
$$\langle p_1(x), p_2(x)\rangle := \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$$
definiert, wobei $a_i = 0$ für $i > n$ und $b_i = 0$ für $i > m$ ist.

iv) Der Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit der Verknüpfung
$$\langle x, y\rangle := 1 + x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}.$$

v) Der Vektorraum $\mathbb{R}^n = \text{lin}(e_1, \ldots, e_n)$ mit der Verknüpfung
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \vec{e}_i.$$

Lösung: Wir prüfen in jedem der fünf Fälle die Eigenschaften (SP1)-(SP3) nach. Zunächst müssen wir jedoch überprüfen ob die angegebenen Abbildungen wohldefiniert sind.

i) Wählen wir die konstante Folge $x := (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$, so ist die Reihe
$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} 1$$
nicht konvergent. Demnach ist die Abbildunge auf V nicht wohldefiniert.

ii) Im Gegensatz zu *i)* ist auf V_f die Abbildung wohldefiniert. Da jede Folge nur endlich viele Folgeglieder enthält, welche ungleich 0 sind reduziert sich die Reihe zu einer endlichen Summe. Wir prüfen nun die Eigenschaften nach.
Mit $n := \max\{i \in \mathbb{N} : |x_i| + |y_i| + |z_i| \neq 0\}$ gilt:

(SP1)
$$\begin{aligned}\langle \lambda x + \mu y, z\rangle &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i)\overline{z_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \overline{z_i} + \mu y_i \overline{z_i} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{z_i} + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{z_i} = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle.\end{aligned}$$

(SP2) Es gilt

$$\overline{\langle x,y\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\overline{x_i} = \langle y,x\rangle.$$

(SP3) Es gilt

$$\langle x,x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.$$

Diese Summe ist nicht negativ und nur 0 wenn $x_i = 0$ für alle i, da $|x_i|^2 \geq 0$ ist.

Damit ist dies ein Skalarprodukt.

iii) Da jedes Polynom in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ endlichen Grad hat, ist die Reihe wiederum eine endliche Summe. Somit ist die Abbildung wohldefiniert. Für ein Polynom p_1 mit Grad n und ein Polynom p_2 mit Grad $m > n$ ist $a_ib_i = 0$ für alle $m > n$. Somit gehen wir o.B.d.A. davon aus, dass p_1 und p_2 denselben Grad n haben. Somit gilt

(SP1)

$$\begin{aligned}\langle(\lambda p_1 + \mu p_2), p_3\rangle &= \sum_{i=0}^{n}(\lambda a_i + \mu b_i)c_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_ic_i + \mu b_ic_i \\ &= \lambda\sum_{i=0}^{n} a_ic_i + \mu\sum_{i=0}^{n} b_ic_i = \lambda\langle p_1,p_3\rangle + \mu\langle p_2,p_3\rangle.\end{aligned}$$

(SP2) Da $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist, müssen wir hier die Symmetrie zeigen:

$$\langle p_1,p_2\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_ib_i = \sum_{i=0}^{n} b_ia_i = \langle p_1,p_2\rangle.$$

(SP3)

$$\langle p_1,p_1\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i^2$$

ist als Summe nichtnegativer Zahlen nichtnegativ und nur 0, wenn $a_i = 0$ für alle i ist.

iv) Diese Abbildung ist kein Skalarprodukt, denn z. Bsp. ist

$$\langle 0,0\rangle = 1$$

im Widerspruch zu (SP3).

v) Diese Abbildung hat für $n > 1$ keine Skalare als Bildbereich, sodass diese Abbildung kein Skalarprodukt ist. Für $n = 1$ ist $\langle x,y\rangle = x\cdot y$, also das Produkt von zwei reellen Zahlen und somit ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe H14 (Basen (4 Punkte))

Gegeben sei der Raum $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ vom Höchstgrad 3.

a) Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2 := \{1, x-3, (x-3)^2, (x-3)^3\}$$

Basen von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sind.

b) Stellen Sie das Polynom $p(x) := x(x-1)(x-2)$ bzgl. beider Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ dar.

Lösung:

a) Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{B}_1$ ein Erzeugendensystem bildet. Ein Polynom $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ kann geschrieben werden als $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ mit $a_i \in \mathbb{R}$. An dieser Darstellung erkennen wir, dass $\mathcal{B}_1$ ein Erzeugendensystem darstellt.

Es bleibt, die lineare Unabhängigkeit der Vektoren zu zeigen. Betrachten wir dazu

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Diese Gleichung ist nur für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, wenn $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ist. Somit sind die Vektoren lin. unabhängig und $\mathcal{B}_1$ eine Basis von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Da die Anzahl der Vektoren in den Mengen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ identisch ist, genügt es die lineare Unabhängigkeit der Vektoren in $\mathcal{B}_2$ zu zeigen. Sind diese lin. unabhängig, so ist auch $\mathcal{B}_2$ ein minimales Erzeugendensystem und somit eine Basis von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Wir betrachten dazu

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1(x-3) + \lambda_2(x-3)^2 + \lambda_3(x-3)^3 = 0.$$

Ausmultiplizieren und zusammenfassen liefert

$$(\lambda_0 - 3\lambda_1 + 9\lambda_2 - 27\lambda_3) + (\lambda_1 - 6\lambda_2 + 27\lambda_3)x + (\lambda_2 - 9\lambda_3)x^2 + \lambda_3 x^3 = 0. \qquad (1)$$

Diese Gleichung ist genau dann für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, wenn die Koeffizienten alle verschwinden, d.h. wenn

$$\begin{aligned} \lambda_0 - 3\lambda_1 + 9\lambda_2 - 27\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - 6\lambda_2 + 27\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 9\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

ist. Aus der letzten Gleichung folgt $\lambda_3 = 0$. Einsetzen in die Gleichungen darüber ergibt nacheinander $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$ und somit sind die Vektoren lin. unabhängig.

b) Ausmultiplizieren liefert

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Dies ist schon die Darstellung bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$ mit den Koordinaten $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$ und $\lambda_3 = 1$, d.h.

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Für die Darstellung bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$ nehmen wir Gleichung (**??**) aus a) und setzen

$$(\lambda_0 - 3\lambda_1 + 9\lambda_2 - 27\lambda_3) + (\lambda_1 - 6\lambda_2 + 27\lambda_3)x + (\lambda_2 - 9\lambda_3)x^2 + \lambda_3 x^3 = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\lambda_0 - 3\lambda_1 + 9\lambda_2 - 27\lambda_3 &= 0\\ \lambda_1 - 6\lambda_2 + 27\lambda_3 &= 2\\ \lambda_2 - 9\lambda_3 &= -3\\ \lambda_3 &= 1.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Lösung $\lambda_3 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_1 = -11$ und $\lambda_0 = 6$, d.h.

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = 6 - 11(x-3) + 6(x-3)^2 + (x-3)^3.$$

bzw.

$$p = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Aufgabe H15 (Folgenräume (4 Punkte))

Gegeben sei der Vektorraum $V := \{a := (a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}\}$ der reellen Folgen.

a) Es sei $e_j \in V$ definiert durch
$$(e_j)_{i\in\mathbb{N}} := \delta_{ji},$$
d.h. e_j ist der Vektor, der an der j. Stelle eine 1 und sonst 0 hat. Charakterisieren Sie $\text{lin}(\{e_j : j \in \mathbb{N}\})$. Ist das System $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Basis von V?

b) Betrachten Sie nun $U := \{a \in V : a_i = a_{i+5}$ für alle $i \in \mathbb{N}\}$. Was ist die Dimension von U? Geben Sie eine Basis an.

Lösung:

a) Die lineare Hülle $\text{lin}(\{e_j : j \in \mathbb{N}\})$ ist die Menge der endlichen Linearkombinationen, d.h. die Menge aller Folgen, welche als endliche Linearkombination der Vektoren e_j dargestellt werden können. Dies sind gerade die Folgen mit nur endlich vielen Einträgen ungleich 0.

Das System $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist keine Basis von V, den die konstante Folge $(1, 1, 1, 1, \ldots) \in V$ kann nicht als endliche Linearkombination dargestellt werden.

b) Mit der Relation $a_i = a_{i+5}$ gilt natürlich auch $a_i = a_{i+5k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit sind die Elemente von U durch die Angabe der ersten 5 Folgeglieder bestimmt. Nehmen wir die Vektoren

$$\begin{aligned}v_1 &= (1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,\ldots)\\ v_2 &= (0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,\ldots)\\ v_3 &= (0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,\ldots)\\ v_4 &= (0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,\ldots)\\ v_5 &= (0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,\ldots)\end{aligned}$$

so bilden diese eine Basis von U. Somit hat U die Dimension 5.

Aufgabe H16 (Weihnachtsaufgabe (4 Bonuspunkte) *Abgabe nach den Ferien*)
Gegeben seien die Punkte

$$\begin{array}{lll}
A = (-1, -\sqrt{3}) & B = (-1 - 2\sqrt{3}, -\sqrt{3} + 2) & C = (-8 - 2\sqrt{3}, -8\sqrt{3} + 2) \\
D = (-5 - 3\sqrt{3}, -5\sqrt{3} + 3) & E = (-6 - 3\sqrt{3}, -6\sqrt{3} + 3) & F = (-3 - 4\sqrt{3}, -3\sqrt{3} + 4) \\
G = (-4 - 4\sqrt{3}, -4\sqrt{3} + 4) & H = (-1 - 5\sqrt{3}, -\sqrt{3} + 5) & I = (-2 - 5\sqrt{3}, -2\sqrt{3} + 5) \\
J = (-6\sqrt{3}, 6) & K = (2 - 5\sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 5) & L = (1 - 5\sqrt{3}, \sqrt{3} + 5) \\
M = (4 - 4\sqrt{3}, 4\sqrt{3} + 4) & N = (3 - 4\sqrt{3}, 3\sqrt{3} + 4) & O = (6 - 3\sqrt{3}, 6\sqrt{3} + 3) \\
P = (5 - 3\sqrt{3}, 5\sqrt{3} + 3) & Q = (8 - 2\sqrt{3}, 8\sqrt{3} + 2) & R = (1 - 2\sqrt{3}, \sqrt{3} + 2) \\
S = (1, \sqrt{3}) & &
\end{array}$$

Gibt es eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bzgl. derer die Punkte ganzahlige Koordinaten haben?

Tipp: Tragen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinden Sie sie in alphabetischer Reihenfolge.

Lösung: Zeichnen wir die Punkte in ein Koordinatensystem ein, so erhalten wir einen gedrehten Tannenbaum. Wählen wir als Basis nun die Vektoren $\{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\}$, so ergeben sich als neue Koordinaten für die Punkte

$$\begin{array}{lll}
A = (-1, 0) & B = (-1, 2) & C = (-8, 2) \\
D = (-5, 3) & E = (-6, 3) & F = (-3, 4) \\
G = (-4, 4) & H = (-1, 5) & I = (-2, 5) \\
J = (0, 6) & K = (2, 5) & L = (1, 5) \\
M = (4, 4) & N = (3, 4) & O = (6, 3) \\
P = (5, 3) & Q = (8, 2) & R = (1, 2) \\
S = (1, 0). & &
\end{array}$$

Wir wünschen Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr.