Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
29./30.11.2007

4. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Lineare Gleichungssysteme)

Gegeben seien die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{llll} ix_1 & +2x_2 & & = 0 \\ 1x_1 & -ix_2 & +ix_3 & = 0 \\ 1x_1 & +ix_2 & +3ix_3 & = 0 \end{array} \qquad \text{b)}\quad \begin{array}{llll} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 5\,. \end{array}$$

Geben Sie den Lösungsraum für a) in $\mathbb{C}^3$ und für b) in $\mathbb{R}^3$ an.

Lösung:

a) Wir erhalten

$$\left.\begin{array}{ccc} i & 2 & 0 \\ 1 & -i & i \\ 1 & i & 3i \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ccc} i & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ccc} i & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Damit können wir einen Parameter frei wählen. Wir setzen $x_3 := \lambda \in \mathbb{C}$ und erhalten somit die Gleichungen

$$\begin{aligned} ix_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Aus der unteren Gleichung erhalten wir $x_2 = -\lambda$. Setzen wir nun unsere beiden Werte in die erste Gleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & ix_1 - 2\lambda = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x_1 = -2i\lambda. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich als Lösungsraum

$$\mathbb{L} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

b) Hier erhalten wir

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right.$$

In der letzten Zeile erhalten wir einen Widerspruch, sodass das Gleichungssystem keine Lösung besitzt, d.h. $\mathbb{L} = \emptyset$.

Aufgabe G11 (Lineare Unabhängigkeit)
Welche der folgenden Familien von Vektoren sind linear unabhängig?

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

b) $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2-3i \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$

c) $x^2 - 1, x + 1, x - 1, 1 \; \in \; P(\mathbb{R})$

Lösung:

a) Die beiden Vektoren sind linear unabhängig. Denn wären sie linear abhängig, so gäbe es einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dies kann jedoch wegen der ersten Kompenente nicht sein, denn es gibt kein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot 0 = 1$.

b) Wir bestimmen die Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des Gleichungssystems

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2-3i \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{llll} i\lambda_1 & +\lambda_2 & +(-2-3i)\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & -i\lambda_3 & = 0 \\ -i\lambda_1 & +\lambda_2 & +(2-3i)\lambda_3 & = 0. \end{array}$$

Für die Lösung ergibt sich

$$\left.\begin{array}{ccc|c} i & 1 & -2-3i & 0 \\ 1 & 1 & -i & 0 \\ -i & 1 & 2-3i & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} i & 1 & -2-3i & 0 \\ 0 & 1-i & -3-3i & 0 \\ 0 & 2 & -6i & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} i & 1 & -2-3i & 0 \\ 0 & 2 & -6i & 0 \\ 0 & 2 & -6i & 0 \end{array}\right.$$

Somit sind die beiden letzten Zeilen identisch und wir können einen Parameter frei wählen. Setzen wir z.Bsp. $\lambda_3 = 1$, so erhalten wir $\lambda_2 = 3i$ und $\lambda_1 = -2i$. Somit ist

$$-2i \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} + 3i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2-3i \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2-3i \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} - 3i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit sind die Vektoren linear abhängig.

c) Man erkennt, dass $(x+1) = (x-1)+2$ ist, d.h. diese drei Vektoren sind schon linear abhängig. Wir weisen dies nocheinmal nach:

Wir bestimmen die Lösungen der Gleichung

$$\lambda_1(x^2-1) + \lambda_2(x+1) + \lambda_3(x-1) + \lambda_4 \cdot 1 = 0.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_1(x^2-1) + \lambda_2(x+1) + \lambda_3(x-1) + \lambda_4 \cdot 1 &= \lambda_1 x^2 - \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_2 + \lambda_3 x - \lambda_3 + \lambda_4 \\ &= x^2(\lambda_1) + x(\lambda_2+\lambda_3) + \lambda_4 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Da wir nicht an allen Lösungen interessiert sind, sondern nur an der Frage ob es außer der trivialen Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ noch weitere gibt, setzen wir an dieser Stelle $\lambda_1 := 0$ und $\lambda_2 := -\lambda_3$. Damit ergibt sich die Gleichung

$$\lambda_4 - 2\lambda_3 = 0.$$

Diese hat eine Lösung für $\lambda_3 = 1$ und $\lambda_4 = 2$. Insgesamt erhalten wir somit

$$0 \cdot x^2 - 1 \cdot (x+1) + 1 \cdot (x-1) + 2 \cdot 1 = 0.$$

Stellen wir diese Gleichung um, so erhalten wir

$$(x+1) = (x-1) + 2.$$

Aufgabe G12 (Kreuzprodukt und bilineare Abbildungen)

Gegeben seien die Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ und eine bilineare Abbildung $B : V \times V \to W$ zwischen den Vektorräumen V und W über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie: $B(x,x) = 0$ gilt genau dann, wenn $B(x,y) = -B(y,x)$ ist.

   Zusatzfrage: Gilt dies auch für Bilinearformen $B : V \times V \to \mathbb{K}$?

b) Wir definieren ε_{ijk} für $(i,j,k) \in \{1,2,3\}^3$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} &= 1 \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} &= -1 \\ \varepsilon_{ijk} &= 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

   i) Zeigen Sie:

$$x \times y = \sum_{i,j,k=1}^{3} x_i y_j \vec{e}_k \varepsilon_{ijk}$$

   ii) Zeigen Sie:

$$\langle e_i \times e_j, e_k \rangle = \varepsilon_{ijk}$$

Lösung:

a) Wir zeigen zunächst die Rückrichtung. Denn ist die bilineare Abbildung antisymmetrisch, so gilt für $v \in V$
$$B(v,v) = -B(v,v)$$
und dies ist nur für $B(v,v) = 0$ wahr, denn das einzige Element, welches zu sich selbst additiv invers ist ist das neutrale Element 0 bzgl. der Addition.
Für die Hinrichtung betrachten wir
$$B(x+y,x+y) = B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y).$$
Gilt nun $B(x,x) = 0$, so erhalten wir durch
$$0 = B(x,y) + B(y,x)$$
die Behauptung.

Zusatzfrage: Wie in i) schon erwähnt gilt für eine beliebige Bilinearform $B : V \times V \to \mathbb{K}$ die Implikation $B(v,w) = -B(w,v)$:$B(v,v) = 0$. Die Rückrichtung ist nur dann nicht erfüllt, wenn wir den endlichen Körper mit 2 Elementen $\mathbb{F}_2$ zulassen. In diesem gilt $1+1 = 0$. D.h. gilt $B(v,w) = 1 = B(w,v)$, so folgt aus
$$0 = B(v+w,v+w) = B(v,v) + B(v,w) + B(w,v) + B(w,w) = B(v,w) + B(w,v)$$
nicht, dass $B(v,w) = -B(w,v)$ ist.

b), i) Da für zwei gleiche Indizes $\varepsilon_{ijk} = 0$ ist, gilt
$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k=1}^{3} x_i y_j \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} &= x_1y_2\vec{e}_3 - x_1y_3\vec{e}_2 - x_2y_1\vec{e}_3 + x_2y_3\vec{e}_1 + x_3y_1\vec{e}_2 - x_3y_2\vec{e}_1 \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (x_3y_1 - y_1x_3)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (x_1y_2 - x_2y_1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - y_1x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = x \times y.
\end{aligned}$$

b), ii) Nach i) gilt
$$\begin{aligned}
\langle \vec{e}_i \times \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle &= \langle \sum_{l,m,n=1}^{3} (\vec{e}_i)_l (\vec{e}_j)_k \vec{e}_n \varepsilon_{lmn}, \vec{e}_k \rangle \\
&= \langle \sum_{l,m,n=1}^{3} \delta_{il}\delta_{jm} \vec{e}_n \varepsilon_{lnm}, \vec{e}_k \rangle \\
&= \langle \sum_{n=1}^{3} \vec{e}_n \varepsilon_{ijn}, \vec{e}_k \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{3} \varepsilon_{ijn} \langle \vec{e}_n, \vec{e}_k \rangle = \varepsilon_{ijk}.
\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H7 (Parameterabhängige lineare Gleichungssysteme (4 Punkte))
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ & 2x_2 & -1x_3 & = & 2 \\ x_1 & +4x_2 & +\alpha x_3 & = & \alpha \end{array}$$

in Abhängigkeit des reellen Parameters α.

Lösung: Wir erhalten

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & \alpha & \alpha \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & \alpha-2 & \alpha-3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha-5 \end{array}$$

Für $\alpha = 1$ erhalten wir in der letzten Zeile den Widerspruch $0 = -4$. Somit gibt es für $\alpha = 1$ keine Lösung.

Für $\alpha \neq 1$ erhalten wir als Lösung

$$\begin{aligned} x_1(\alpha) &= 5 - 3\frac{\alpha-5}{\alpha-1} \\ x_2(\alpha) &= -1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha-5}{\alpha-1} \\ x_3(\alpha) &= \frac{\alpha-5}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe H8 (Kern und Bild (4 Punkte))
Seien V, W Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir bezeichnen mit

$$\text{Ker } \varphi := \{v \in V : \varphi(v) = 0\} \subset V$$

den *Kern von* φ und mit

$$\text{Bild } \varphi := \{w \in W : \text{es gibt ein } v \in V \text{ mit } \varphi(v) = w\} \subset W$$

das *Bild von* φ.

a) Gegeben sei die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y, 0)$. Bestimmen Sie Ker ψ und Bild ψ.
b) Zeigen Sie, dass im allgemeinen der Kern einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ ein Untervektorraum von V und das Bild ein Untervektorraum von W ist.

Lösung:

a) Wir bestimmen zunächst Ker ψ, d.h. wir bestimmen die Lösungen der Gleichung

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die untere Gleichung ist immer erfüllt und die obere ist für $x = -y$ wahr. Damit ist

$$\text{Ker } \psi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = -y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir bestimmen nun Bild ψ. Wie wir sofort erkennen wird kein Vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ auf einen Vektor $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ mit $w \neq 0$ abgebildet. Damit ist

$$\text{Bild } \psi \subset \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Das Bild von $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$ unter ψ ist $\psi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da ψ linear ist, gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\psi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}\right) = \psi\left(\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}\right).$$

Damit ist Bild $\psi = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

b) Wir prüfen die drei Bedingungen für Untervektorräume nach.

$0 \in U$ Für jede lin. Abbildung φ ist $\varphi(0) = 0$. Aus dieser Gleichung folgt direkt $0 \in$ Ker φ und $0 \in$ Bild φ.

$v_1 + v_2 \in U$ Für zwei Vektoren $v, w \in V$ gilt

$$\varphi(v_1 + v_2) \overset{\varphi \text{ lin.}}{=} \varphi(v_1) + \varphi(v_2). \tag{1}$$

Sind $v_1, v_2 \in$ Ker φ, so folgt aus (1) $\varphi(v_1 + v_2) = 0$, d.h. $v_1 + v_2 \in$ Ker φ.

Sind die Vektoren $w_1, w_2 \in$ Bild φ, so gibt es Vektoren $v_1, v_2 \in V$ mit $\varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = w_2$. Damit folgt aus Gleichung (1)

$$w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \overset{(1)}{=} \varphi(v_1 + v_2).$$

Damit ist $w_1 + w_2 \in$ Bild φ.

$\lambda v \in U$ Für ein lineare Abbildung gilt

$$\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v). \tag{2}$$

Ist nun $v \in$ Ker φ, so ergibt sich aus (2) $\varphi(\lambda v) = 0$, d.h. $\lambda v \in$ Ker φ.

Ist nun $w \in$ Bild φ, so gibt es einen Vektor $v \in V$, sodass $\varphi(v) = w$ ist. Damit folgt aus Gleichung (2)

$$\lambda w = \lambda\varphi(v) \overset{(2)}{=} \varphi(\lambda v).$$

Somit ist $\lambda w \in$ Bild φ.

Damit haben wir gezeigt, dass für jede lineare Abbildung φ der Kern von φ und das Bild von φ Untervektorräume der jeweiligen Vektorräume sind.

Aufgabe H9 (Spatprodukt (4 Punkte))

Gegeben seien die Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\langle x \times y, z\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ist.

b) Überlegen Sie sich, dass

$$\langle x \times y, z\rangle = \|x \times y\| \; \|z\| \; \cos\varphi$$

ist, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $x \times y$ und z ist. Zeigen Sie, dass durch diese Formel bestätigt wird, dass das Spatprodukt das Volumen des von den Vektoren x, y, z aufgespannten Parallelepipeds ist.

Lösung:

i) Für das Spatprodukt gilt

$$\langle x\times y, z\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\rangle = z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Für die Determinante auf der rechten Seite gilt

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} &= x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - z_2y_3x_1 - z_3y_1x_2 \\ &= z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned}$$

Vergleich der beiden Terme liefert die Behauptung.

ii) Aus der Winkelformel für das Standardskalarprodukt folgt direkt

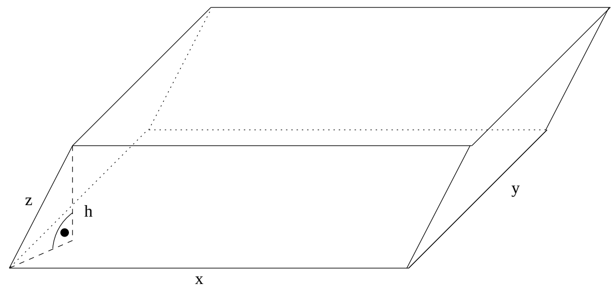
$$\langle x \times y, z\rangle = \|x \times y\| \; \|z\| \; \cos\varphi.$$

Betrachten wir nun ein Parallelepiped, welches von den Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird:

Wollen wir das Volumen dieses Parallelepipedes bestimmen, so benötigen wir den Flächeninhalt des von den Vektoren x und y aufgespannten Parallelogrammes und die Höhe h (Scherungsinvarianz des Volumens). Aus der Vorlesung wissen wir, dass der Flächeninhalt des Parallelogrammes durch $\|x \times y\|$ gegeben ist.

Da $x \times y$ senkrecht auf der von x und y aufgespannten Ebene steht, ist der Vektor h, welcher die Höhe beschreibt ein skalares Vielfaches von $x \times y$, nämlich die orthogonale Projektion von z auf $x \times y$. Für diese gilt

$$h = \frac{\langle z, x \times y\rangle}{\|x \times y\|^2}(x \times y) = \frac{\|z\| \; \|x \times y\| \; \cos\varphi}{\|x \times y\|^2}(x \times y) = \frac{\|z\| \; \cos\varphi}{\|x \times y\|}(x \times y).$$



Demnach ergibt sich für das Volumen

$$V = A_P \cdot \|h\| = \|x \times y\| \cdot \left\| \frac{\|z\| \ \cos\varphi}{\|x \times y\|} (x \times y) \right\| = \|z\| \ \|x \times y\| \ |\cos\varphi|.$$