Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
15./16.11.2007

3. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Abbildungen)

Nachfolgend werden verschiedene Abbildungen beschrieben. Hierbei bezeichnen f, g immer Funktionen, sowie x, y, z Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Die Abbildungen sind jeweils auf geeigneten Räumen definiert.

Ordnen Sie die Abbildungen auf der linken Seite den Abbildungstypen auf der rechten Seite in eineindeutiger Art und Weise zu, d.h. ordnen Sie jeder Funktion genau einen Typ zu:

$f \mapsto \int_a^b f(t)\ dt$	symmetrische Bilinearform
$(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\ dt$	lineare Abbildung
Spiegelung in $\mathbb{R}^2$ an einer Ursprungsgeraden	Tensor 3. Stufe
$(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\ dt$	alternierende 3-Form
$(x,y,z) \mapsto 17x_3y_2z_1 + x_2y_1z_3$	Linearform
$\begin{aligned}(x,y,z) \quad\mapsto\quad & x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 \\ & -z_1y_2x_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3\end{aligned}$	antisymmetrische Bilinearform

Lösung:

1.) Die Abbildung $f \mapsto \int_a^b f(t)\ dt$ ist eine Linearform, denn sie ist linear und bildet in den Körper ab.

2.) Die Abbildung $(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\ dt$ ist eine symmetrische Bilinearform. Sie ist linear in der ersten und zweiten Komponenten und es ist

$$(g,f) = \int_a^b g(t)f(t)\ dt = \int_a^b f(t)g(t)\ dt = (f,g).$$

3.) Eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden ist eine lineare Abbildung.

4.) Die Abbildung $(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\ dt$ ist bilinear und antisymmetrisch, denn es gilt

$$(g,f) = \int_a^b g(t)f'(t) - g'(t)f(t)\ dt = -\int_a^b f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\ dt = -(f,g).$$

Also ist sie eine antisymmetrische Bilinearform.

5.) Die Abbildung $(x,y,z) \mapsto 17x_3y_2z_1 + x_2y_1z_3$ ist ein Tensor 3. Stufe. Für die erste Komponente gilt beispielsweise

$$\begin{aligned}(x+v,y,z) &= 17(x_3+v_3)y_2z_1 + (x_2+v_2)y_1z_3 \\ &= 17x_3y_2z_1 + 17v_3y_2z_1 + x_2y_1z_3 + v_2y_1z_3 \\ &= 17x_3y_2z_1 + x_2y_1z_3 + 17v_3y_2z_1 + v_2y_1z_3 = (x,y,z) + (v,y,z).\end{aligned}$$

6.) Die Abbildung

$$(x,y,z) \mapsto x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3$$

ist eine alternierende k-Form. Die Multilinearität zeigt man genau wie in 5.). Vertauschen wir zwei Elemente, beispielsweise x und y, so gilt

$$\begin{aligned}(y,x,z) &= y_1x_2z_3 + x_1z_2y_3 + z_1y_2x_3 - z_1x_2y_3 - y_1z_2x_3 - x_1y_2z_3 \\ &= -x_1y_2z_3 - y_1z_2x_3 - z_1x_2y_3 + z_1y_2x_3 + x_1z_2y_3 + y_1x_2z_3 \\ &= -(x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3) \\ &= -(x,y,z).\end{aligned}$$

Aufgabe G8 (Normen und Metrik)

Wir betrachten die euklidische Norm $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1,\dots,x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

a) Prüfen Sie nach, dass $\|\cdot\|_2$ die Eigenschaften einer Norm besitzt.

b) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer Norm $\|\cdot\|$. Dann kann man als *Abstand*

$$d : V \times V \to [0,\infty), (x,y) \mapsto \|x-y\|$$

definieren. Geben Sie im Falle $V = \mathbb{R}^2$ und der Norm $\|\cdot\|_2$ an, welche geometrische Interpretation der Metrik die drei Normeigenschaften zur Folge haben.

Lösung:

a) i) Es ist klar, dass $\|0\|_2 = 0$ ist. Betrachten wir nun $\|x\|_2 = 0$, d.h.

$$0 = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}.$$

Für jedes $i = 1, \ldots, n$ ist $x_i^2 \geq 0$, d.h. $\sum_{i=0}^{n} x_i^2$ ist eine Summe nichtnegativer Summanden. Diese ist genau dann 0, wenn jeder Summand schon 0 ist, d.h. $x_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ also $x = 0$.

ii) Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2} = |\lambda| \|x\|_2.$$

iii) Um die Dreiecksungleichung $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ zu zeigen betrachten wir die quadrierte Ungleichung

$$\|x + y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 = \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2.$$

Da beide Seiten der Ungleichung dasselbe Vorzeichen haben ist quadrieren eine Äquivalenzumformung. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_2^2 &= \sum_{i=0}^{n} (x_i + y_i)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=0}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\
&= \|x\|_2^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|_2^2 \\
&\leq \|x\|_2^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|_2^2 \\
&\overset{\text{CS-Ungl.}}{\leq} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2.
\end{aligned}$$

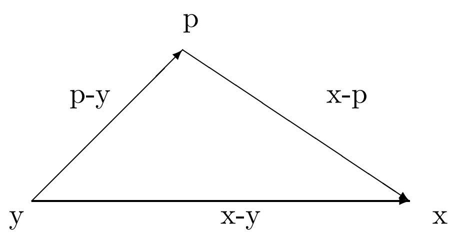
b) Für die Eigenschaften erhalten wir:

Definitheit: Die Definitheit einer Norm hat hier zur Folge, dass aus $\|x - y\|_2 = 0$ folgt, dass $x - y = 0$ ist, d.h. $x = y$.
Es haben also nur gleiche Punkte Abstand 0 voneinander.

Homogenität: Hierdurch wird ein proportionales Wachstum gesichert. Betrachten wir zwei Punkte x, y, so haben diese den Abstand $\|x - y\|_2$ voneinander. Wir können nun diese Punkte voneinander entfernen, indem wir nicht mehr den Vektor $x - y$ betrachten, sondern den Vektor $\lambda(x - y)$. Nun sollte die Entfernung der neuen Punkte λx und λy das $|\lambda|$-fach der alten Entfernung sein. Dies ist wegen der Homogenität der Fall, denn es gilt

$$\|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\|_2 = |\lambda| \; \|x - y\|_2.$$

$\triangle$-Ungl.: Die Dreiecksungleichung hat zur Folge, dass keine Verbindung von zwei Punkte x und y kürzer ist, also die Strecke $x - y$. Ist z. Bsp. p eine Punkt ausserhalb dieser Strecke, so stellt der Vektorzug $(p - y) + (x - p)$ einen Umweg dar:



Für die Länge diese Vektorzuges gilt

$$\|x - y\|_2 = \|(p - y) + (x - p)\|_2 \leq \|p - y\|_2 + \|x - p\|_2.$$

Damit ist der Umweg höchstens länger.

Aufgabe G9 (Untervektorräume)

a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$H_0 := \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bildet die Menge

$$H_1 := \{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

auch einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?

c) Gegeben sei $V = \mathbb{C}^n$ und $a \in V$. Zeigen Sie, dass die Menge $H_a := \{v \in V : \langle v, a\rangle = 0\}$ einen Untervektorraum von V bildet.

d) Gegeben sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V und Untervektorräume U_1 und U_2 von V.

i) Zeigen Sie, dass die Menge $S := U_1 \cap U_2$ ebenfalls einen Untervektorraum bildet.

ii) Gilt dies auch für den Durschnitt endlich vieler Untervektorräume? Was ist mit $U_1 \cup U_2$?

Lösung:

a) Wir zeigen, dass die drei Bedingungen für Untervektorräume erfüllt sind:

i) $0 \in H_0$. Wählen wir $x_1 = x_2 = 0$, so ist wegen $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ auch der Vektor $(0, 0, 0) \in H_0$. Da $(0, 0, 0)$ der Nullvektor in $\mathbb{R}^3$ ist, ist $0 \in H_0$.

ii) Seien $v, w \in H_0$, d.h. $v = (v_1, v_2, 0)$ und $w = (w_1, w_2, 0)$. Dann gilt

$$v + w = (v_1, v_2, 0) + (w_1, w_2, 0) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, 0 + 0) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, 0),$$

d.h. $v + w \in H_0$.

iii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in H_0$. Dann gilt

$$\lambda v = \lambda(v_1, v_2, 0) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda \cdot 0) = (\lambda v_1, \lambda v_2, 0),$$

d.h. $\lambda v \in H_0$ und somit H_0 ein Untervektorraum.

b) Die Menge H_1 bildet keinen Untervektorraum, denn keine der Bedingungen ist erfüllt. Beispielsweise ist für $v, w \in H_1$

$$v + w = (v_1, v_2, 1) + (w_1, w_2, 1) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, 1 + 1) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, 2)$$

nicht in H_1.

c) i) Da $\langle 0, a\rangle = 0$ für alle $a \in \mathbb{C}^n$ ist, ist $0 \in H_a$.

ii) Für $v, w \in H_a$ gilt

$$\langle v + w, a\rangle = \langle v, a\rangle + \langle w, a\rangle \overset{v,w \in H_a}{=} 0,$$

d.h. $v + w \in H_a$.

iii) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in H_a$ gilt

$$\langle \lambda v, a\rangle = \lambda\langle v, a\rangle \overset{v \in H_a}{=} \lambda \cdot 0 = 0,$$

d.h. $\lambda v \in H_a$. Damit ist H_a ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$.

d) i) Da U_1 und U_2 Untervektorräume von V sind ist $0 \in U_1$ und $0 \in U_2$. Somit ist auch $0 \in S$.

Seien $v, w \in S$. Da S der Durchschnitt von U_1 und U_2 ist, müssen v und w sowohl in U_1 als auch in U_2 sein. Da beides Untervektorräume sind, ist die Summe $v + w$ in U_1 und in U_2 und somit auch in S.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in S$. Wiederum muss v in U_1 und U_2 enthalten sein. Da U_1 und U_2 jeweils ein Untervektorraum sind, ist der Vektor λv in U_1 und U_2 enthalten und somit auch im Durchschnitt S.

Damit ist S ein Untervektorraum von V.

ii) Sind nun $U_1, \ldots, U_n$ endlich viele Untervektorräume, so gilt wegen der Assoziativität des Schnittes, dass

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap \ldots \cap U_{n-1} \cap U_n = ((\cdots (U_1 \cap U_2) \cap U_3) \cap \ldots) \cap U_{n-1}) \cap U_n)$$

ist. Nun folgt die Behauptung durch $n - 1$-faches Anwenden von i).

Die Vereinigung von zwei Untervektorräumen $U_1 \cup U_2$ ist dagegen kein Untervektorraum. Wählen wir z. Bsp. die Untervektorräume

$$U_1 := \{v \in \mathbb{R}^2 : v = \lambda e_1 \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

und

$$U_2 := \{v \in \mathbb{R}^2 : v = \lambda e_2 \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}\},$$

so ist

$$U_1 \cup U_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 : v_1 = 0 \text{ oder } v_2 = 0\}.$$

Wählen wir $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so ist $v + w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ kein Element von $U_1 \cup U_2$.

Hausübung

Aufgabe H7 (Orthogonale Zerlegung und Projektion)
Gegeben seien die folgenden Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \ v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie die orthogonale Zerlegung von v_1 bzgl. v_2 und von v_1 bzgl. v_3.

b) Sei H die Ebene, die von den Vektoren v_2 und v_3 aufgespannt wird. Können Sie das Bild von v_1 auf H bestimmen (Skizze)?

Lösung:

a) Wir projizieren v_1 orthogonal auf v_2, d.h. wir bestimmen

$$v_1^{(\|)} = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \frac{-6}{9} v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$v_1^{(\perp)} = v_1 - v_1^{(\|)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

. Genauso erhalten wir für die Zerlegung bzgl. v_3

$$v_1^{(\|)} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$v_1^{(\perp)} = \frac{10}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Ein Bild von v_1 auf H ist gegeben durch

$$\varphi(v) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{\langle v_1, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Möchten wir die orthogonale Projektion auf H bestimmen, so liefert uns dies

$$\pi(v) = \frac{\langle v_1, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \frac{\langle v_1, u \rangle}{\|u\|^2} u = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 16 \end{pmatrix},$$

wobei $u := v_2 - \frac{\langle v_2, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3$ die orthogonale Projektion von v_2 auf v_3 ist.

Aufgabe H8 (Normen und Skalarprodukt (4 Punkte))

a) Zeigen Sie, dass das Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{R}$ durch

$$x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{1}$$

eine Norm

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty), x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

definiert. Kennen Sie diese Norm?

b) Wir setzen das Skalarprodukt durch

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Warum ist hiermit durch (**??**) keine Norm definiert?

c) Betrachten Sie das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}.$$

Induziert dieses Skalarprodukt durch (**??**) eine Norm?

Tipp: Für ein beliebiges Skalarprodukt gilt $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$.

Lösung:

a) Es ist

$$\sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|_2.$$

Damit ist durch die Abbildung eine Norm definiert, nämlich die euklidische Norm.

b) Für eine komplexe Zahlen x ist der Ausdruck x^2 nicht notwendigerweise reel, d.h. der Ausdruck $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ ist nicht definiert.

c) Wegen $\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle y, x\rangle_{\mathbb{C}}}$ ist das Problem aus b) hier gelöst, denn gilt für eine komplexe Zahl z die Gleichung $z = \overline{z}$, so ist $z \in \mathbb{R}$. Wir prüfen nun die Normeigenschaften nach, hierbei ist $\|x\|_{\mathbb{C}} := \sqrt{\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}}}$.

i) Für $\|x\|_{\mathbb{C}} = 0$ ist

$$\|x\|_{\mathbb{C}} = \sqrt{\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \overline{x_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = 0.$$

Dies ist wiederum eine Summe nichtnegativer reeler Zahlen, sodass hieraus $x_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ folgt, d.h. $x = 0$.

ii) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\|\lambda x\|_{\mathbb{C}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda|^2 |x_i|^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = |\lambda| \|x\|_{\mathbb{C}}.$$

iii) für $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{\mathbb{C}}^2 &= \langle x+y, x+y\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x,x\rangle_{\mathbb{C}} + \langle x,y\rangle_{\mathbb{C}} + \langle y,x\rangle_{\mathbb{C}} + \langle y,y\rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \|x\|_{\mathbb{C}}^2 + \langle x,y\rangle_{\mathbb{C}} + \overline{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}} + \|y\|_{\mathbb{C}}^2 \\
&= \|x\|_{\mathbb{C}}^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}) + \|y\|_{\mathbb{C}}^2 \\
&\leq \|x\|_{\mathbb{C}}^2 + 2|\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}| + \|y\|_{\mathbb{C}}^2 \\
&\overset{\text{CS-Ungl.}}{\leq} \|x\|_{\mathbb{C}}^2 + 2\|x\|_{\mathbb{C}}^2\|y\|_{\mathbb{C}}^2 + \|y\|_{\mathbb{C}}^2 = (\|x\|_{\mathbb{C}}^2 + \|y\|_{\mathbb{C}}^2)^2.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Das Standardskalarprodukt ist nicht bilinear. Es ist linear in der ersten Komponente und semilinear in der zweiten, d.h. es gilt zwar $\langle x, y+z\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x,y\rangle_{\mathbb{C}} + \langle x,z\rangle_{\mathbb{C}}$, jedoch $\langle x, \lambda y\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\lambda}\langle x,z\rangle_{\mathbb{C}}$.

Aufgabe H9 (Koordinaten (4 Punkte))

Betrachten Sie die Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ in $\mathbb{C}^n$ über dem Körper $\mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass jeder Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ als Linearkombination $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ angegeben werden kann.

b) Zeigen Sie, dass diese Darstellung als Linearkombination eindeutig ist, indem Sie für zwei verschiedene Darstellungen zeigen, dass alle Koeffizienten übereinstimmen müssen.
In diesem Fall heissen die Koeffizienten λ_i die *Koordinaten* von v bzgl. $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Tipp: Nutzen Sie aus, dass $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ ist.

Lösung:

a) Wir können einen Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ als n-Tupel komplexer Zahlen angeben, d.h.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun die Linearkombination $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v &= \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, dass v als Linearkombination der e_i dargestellt werden kann, indem wir $\lambda_i = v_i$ setzen.

b) Wir nehmen an, es gibt zwei Darstellungen als Linearkombination, d.h. es existieren Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$, so dass

$$\mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n = v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

ist. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt dann

$$\langle e_i, v \rangle = \langle e_i, \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n \rangle = \langle e_i, \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \rangle.$$

Wegen $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ folgt hieraus für jedes $i = 1, \ldots, n$

$$\langle e_i, v \rangle = \mu_i \langle e_i, e_i \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_i \rangle,$$

d.h. $\lambda_i = \mu_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Somit ist die Darstellung eindeutig.