Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08
01./02.11.2007

2. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Gruppen II)

Entscheiden Sie, ob es sich bei den nachfolgenden Mengen um Gruppen handelt.

i) Gegeben sei die Menge $\mathcal{F}_0$ aller Funktionen von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ nach $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wir versehen $\mathcal{F}_0$ mit der punktweisen Multiplikation $*$, d.h. $(f * g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.

ii) Die Menge $X := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 10\} \subset \mathbb{Z}$ mit der Addition von $\mathbb{Z}$.

iii) $(\mathbb{C}, \oplus)$ wobei $z \oplus w := |z + w|$ ist.

iv) $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ mit der Multiplikation auf $\mathbb{C}$.

Lösung:

i) Da das Produkt zweier reeller Zahlen wieder eine reelle Zahl ist, ist für Funktionen $f, g \in \mathcal{F}_0$ das Produkt $f * g$ wieder eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, nämlich die Funktion $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$. Das neutrale Element ist die konstante Funktion $c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$, da für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{F}_0$

$$(f * c_1)(x) = f(x) \cdot c_1(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) = 1 \cdot f(x) = c_1(x) \cdot f(x) = (c_1 * f)(x)$$

gilt. Das inverse Element zu einer Funktion $f \in \mathcal{F}_0$ ist eine Funktion g, welche $f * g = c_1 = g * f$ erfüllt. Das heisst, es muss

$$1 = c_1(x) = (f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten und dies ist genau dann der Fall, wenn $g(x) := (f(x))^{-1}$ ist. Dies ist für alle $f \in \mathcal{F}_0$ möglich, sodass $\mathcal{F}_0$ eine Gruppe bildet.

ii) Das neutrale Element 0 ist in X enthalten und weiterhin ist jedes Element in X invertierbar, denn für jedes $x \in X$ ist $-x \in X$ enthalten.

Dennoch ist X keine Gruppe, denn X ist nicht abgeschlossen. Es ist $5 + 7 \notin X$.

iii) Die Verknüpfung besitzt kein neutrales Element. Denn für $z, w \in \mathbb{C}$ ist $z \oplus w \in \mathbb{R}$. Ein neutrales Element e muss die Bedingung $z \oplus e = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllen. Wählen wir nun $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, so ist dies offensichtlich verletzt.

iv) Wir prüfen zunächst die Abgeschlossenheit. Für $z, w \in \mathbb{S}^1$ ist $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 1$, d.h. $z \cdot w \in \mathbb{S}^1$.

Das neutrale Element in $\mathbb{C}$ bezüglich der Multiplikation ist 1 und da $|1| = 1$ ist, ist $1 \in \mathbb{S}^1$. Weiterhin ist jedes Element in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ invertierbar und da $0 \notin \mathbb{S}^1$ ist, ist jedes Element von $\mathbb{S}^1$ in $\mathbb{C}$ invertierbar. Wegen $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ ist das Inverse auch in $\mathbb{S}^1$ und somit $\mathbb{S}^1$ eine Gruppe.

Aufgabe G5 (Vektorräume)

Gegeben sei mit $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Polynome $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Entscheiden Sie welche der folgenden Teilmengen von $P(\mathbb{R})$ zusammen mit der Addition und skalaren Multiplikation von $P(\mathbb{R})$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bilden.

i) $P_n(\mathbb{R}) := \{p \in P(\mathbb{R}) : \text{Grad } p \leq n\}, \ (n \in \mathbb{N})$

ii) $P^0(\mathbb{R}) := \{p \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 0\}$

iii) $P^1(\mathbb{R}) := \{p \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 1\}$

b) Entscheiden Sie, ob es sich in den nachfolgenden Fällen um Vektorräume handelt. Hierbei sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation ausgestattet.

i) $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

ii) $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Lösung:

a) i) Das konstante Polynom $p(x) \equiv 0$ hat den Grad 0 und ist somit für alle $n \in \mathbb{N}$ in $P_n(\mathbb{R})$ enthalten. Weiterhin gilt für die Summe zweier Polynome p mit Grad n_p und q mit Grad n_q

$$\text{Grad}(p + q) \leq \max\{n_p, n_q\}.$$

Damit ist $p + q \in P_n(\mathbb{R})$.
Auch Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ kann den Grad eines Polynoms höchstens verkleinern (genauer: er bleibt gleich für $\lambda \neq 0$ und ist 0 für $\lambda = 0$), d.h. $\lambda p \in P_n(\mathbb{R})$. Damit ist $P_n(\mathbb{R})$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

ii) Auch hier ist das konstante Polynom $p(x) \equiv 0$ enthalten. Für zwei Polynome $p, q \in P^0(\mathbb{R})$ ist $(p + q)(0) = p(0) + q(0) = 0$, d.h. $p + q \in P^0(\mathbb{R})$.
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $p \in P^0(\mathbb{R})$ ist $(\lambda p)(0) = \lambda p(0) = 0$, d.h. $\lambda p \in P^0(\mathbb{R})$. Damit ist $P^0(\mathbb{R})$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

iii) Das konstanten Polynom $p(z) = 0$ ist nicht in $P^1(\mathbb{R})$ enthalten und somit kann $P^1(\mathbb{R})$ kein Vektorraum sein.

b) i) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, denn $\mathbb{R}$ ist eine abelsche Gruppe bzgl. der Addition und für ein Skalar $\lambda \in \mathbb{Q}$ und einen Vektor $v \in \mathbb{R}$ ist λv wieder eine reelle Zahl, also ein Vektor in $\mathbb{R}$.

ii) $\mathbb{Q}$ ist kein $\mathbb{R}$-Vektorraum, denn für $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und $v \in \mathbb{Q}$ ist $\lambda v \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe G6 (Normen)

Gegeben seien die folgenden Funktionen $\|\cdot\|_i : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ durch

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \|x\|_2 &:= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|x\|_\infty &:= \max\{|x_i| : i = 1,\dots,n\}. \end{aligned}$$

a) Skizzieren Sie für den Fall $n = 2$ die Einheitskugeln $B_i := \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\|_i \leq 1\}$ für die Abbildungen $\|\cdot\|_i$.

b) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem Vektorraum V über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ und für alle $\lambda \in [0,1]$

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|$$

gilt. Versuchen Sie dazu, die Konstruktion $\lambda x + (1-\lambda)y$ geometrisch zu interpretieren.

c) Zeigen Sie, dass die Einheitskugel einer Norm konvex ist.

d) Ist die Abbildung

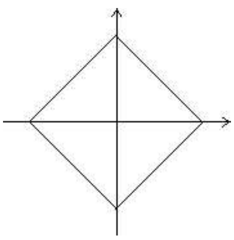
$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^2$?

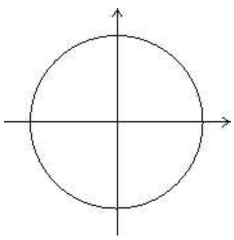
Tipp: Betrachten Sie $\left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\|$ im Hinblick auf Aufgabenteil c).

Lösung:

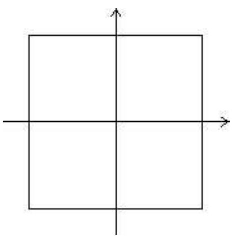
a) Es gilt:



$i = 1$



$i = 2$



$i = \infty$

b) Es gilt

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} \|\lambda x\|+\|(1-\lambda)y\| = |\lambda|\ \|x\|+|(1-\lambda)|\ \|y\| \overset{\lambda\in[0,1]}{=} \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\|.$$

Hierbei bezeichnet $\lambda x + (1-\lambda)y$ die Konvexkombination der beiden Punkte x, y, d.h. deren Verbindungsstrecke.

c) Die Einheitskugel einer Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum V ist die Menge $B := \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$. Konvex bedeutet, dass mit zwei Punkte v und w auch die gesamte Verbindungsstrecke der Punkte in der Menge enthalten ist. Die Verbingsstrecke zwischen v und w ist gegeben durch

$$\lambda v + (1-\lambda)w \quad \text{für } \lambda \in [0,1].$$

Nach b) gilt hierbei für alle $\lambda \in [0,1]$

$$\|\lambda v + (1-\lambda)w\| \leq \lambda\|v\| + (1-\lambda)\|w\|.$$

Wenn $v, w \in B_1$ sind, so ist $\|v\| \leq 1$ und $\|w\| \leq 1$, d.h. für alle $\lambda \in [0,1]$ ist

$$\|\lambda v + (1-\lambda)w\| \leq \lambda\|v\| + (1-\lambda)\|w\| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Damit ist jeder Punkt der Verbindungsstrecke von v nach w ebenfalls in der Einheitskugel enthalten und diese somit konvex.

d) Es ist

$$\left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\| = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2.$$

Weiterhin ist $\left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\|$ der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn es gilt

$$\frac{1}{2}v + (1-\frac{1}{2})w = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da sowohl $\|v\| = 1$ als auch $\|w\| = 1$ ist, und somit $v, w \in B$ sind, aber der Mittelpunkt nicht in B enthalten ist, ist die "Einheitskugel" von $\|\cdot\|$ nicht konvex und $\|\cdot\|$ kann somit keine Norm sein.

Hausübung

Aufgabe H4 (Lineare Abbildungen (4 Punkte))

Wir bezeichnen mit D^2 den Raum der zweimal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und mit $\mathcal{F} := \{\text{Funktionen von } \mathbb{R} \text{ nach } \mathbb{R}\}$ den Raum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Entscheiden Sie in jedem der nachfolgenden Fälle, ob es sich um eine lineare Abbildung zwischen den jeweiligen $\mathbb{R}$-Vektorräumen handelt:

i) $\delta_1 : D^2 \to \mathcal{F}, f \mapsto 3f'' + f'$.

ii) $\delta_2 : D^2 \to \mathcal{F}, f \mapsto e^{f''} + f'$.

iii) Für ein festes $x \in \mathbb{R}$ die Abbildung $A_x : \mathcal{F} \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(x)$.

Lösung:

i) Für $f, g \in D^2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\delta_1(\lambda f + \mu g) &= 3(\lambda f + \mu g)'' + (\lambda f + \mu g)' = 3\lambda f'' + 3\mu g'' + \lambda f' + \mu g' \\ &= \lambda(3f'' + f') + \mu(3g'' + g') = \lambda\delta_1(f) + \mu\delta_1(g).\end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung linear. Der lineare Differentialoperator δ_1 beschreibt demnach eine lineare Differentialgleichung.

ii) Für $f, g \in D^2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\delta_2(\lambda f + \mu g) = e^{(\lambda f + \mu g)''} + (\lambda f + \mu g)' = e^{\lambda f''} \cdot e^{\mu g''} + \lambda f' + \mu g'.$$

Dies ist nicht dasselbe wie

$$\lambda\delta_2(f) + \mu\delta_2(g) = \lambda(e^{f''} + f') + \mu(e^{g''} + g') = \lambda e^{f''} + \mu e^{g''} + \lambda f' + \mu g'.$$

Damit ist die Abbildung δ_2 nicht linear. Demnach beschreibt die Abbildung δ_2 keine lineare Differentialgleichung.

iii) Für $f, g \in \mathcal{F}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$A_x(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda A_x(f) + \mu A_x(g).$$

Damit ist die Abbildung linear.

Aufgabe H5 (Einheitengruppe (4 Punkte))

Gegeben sei eine Menge S mit einer assoziativen Verknüpfung $\cdot : S \times S \to S$ und einem neutralen Element e bzgl. $\cdot$. Wir bezeichnen mit

$$S^\times := \{s \in S \ : \ \text{es gibt ein } s' \in S \text{ mit } s \cdot s' = s' \cdot s = e\}$$

die Menge der invertierbaren Elemente von S bzgl. $\cdot$.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{R}^\times$ bzgl. der Multiplikation und $P(\mathbb{R})^\times$ bzgl. der punktweisen Multiplikation.

b) Zeigen Sie, dass $S^\times$ eine Gruppe bildet (die sogenannte Einheitengruppe).
Tipp: Zeigen Sie u.a., dass $S^\times$ bzgl. der Verknüpfung $\cdot$ abgeschlossen ist, d.h. dass für $s, t \in S^\times$ auch $s \cdot t \in S^\times$ ist.

Lösung:

a) Jede reelle Zahl $x \neq 0$ besitzt ein multiplikativ Inverses, nämlich $\frac{1}{x}$. Damit ist $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Bzgl. der punktweisen Multiplikation ist ein Element $p \in P(\mathbb{R})$ genau dann invertierbar, wenn es ein Element $q \in P(\mathbb{R})$ gibt, sodass $pq = qp = c_1$ ist, denn das neutrale Element bzgl. punktweiser Multiplikation ist die konstante Abbildung $c_1(x) \equiv 1$. Damit x^n invertierbar ist, muss $x^n \cdot q(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sein. Dies ist der Fall, wenn $q(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ ist. Dies ist aber nur für $n = 0$ ein Polynom, d.h. ein Element $p \in P(\mathbb{R})$ kann nur invertierbar sein, wenn es konstant ist. Damit ist das Problem auf die Invertierbarkeit der reellen Zahlen zurückgeführt. Wir haben soeben gesehen, dass $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist, d.h.

$$P(\mathbb{R})^\times = \{p \in P(\mathbb{R}) : p \equiv c \text{ mit } c \in \mathbb{R}^\times\}.$$

b) Da das neutrale Element e von S bzgl. $\cdot$ invertierbar ist, ist $e \in S^\times$. Weiterhin ist ein Element $s \in S^\times$ in S invertierbar. Das inverse Element s^{-1} ist aber ebenfalls in $S^\times$, denn zu s^{-1} gibt es ein Element $s' \in S$, sodass $s^{-1} \cdot s' = s' \cdot s^{-1} = e$ ist, nämlich $s' := s$. Somit ist jedes Element in $S^\times$ auch in $S^\times$ invertierbar.

Es bleibt die Abgeschlossenheit zu zeigen. Angenommen es gibt zwei Elemente $s, t \in S^\times$, so dass $s \cdot t$ nicht in $S^\times$ enthalten ist, d.h. $s \cdot t$ in S nicht invertierbar ist. Es gibt also kein Element $u \in S$, sodass $(s \cdot t) \cdot u = e$ ist. Da $s, t \in S^\times$ sind, sind sowohl s als auch t in S invertierbar, d.h. es gibt die Elemente $s^{-1}, t^{-1} \in S$ und somit auch das Element $(t^{-1} \cdot s^{-1})$ in S. Für dieses Element gilt jedoch

$$(s \cdot t) \cdot (t^{-1} \cdot s^{-1}) = s \cdot t \cdot t^{-1} \cdot s^{-1} = s \cdot s^{-1} = e.$$

Damit haben wir einen Widerspruch zur ursprünglichen Annahme, dass $s \cdot t$ nicht invertierbar ist. Somit ist $S^\times$ abgeschlossen und damit eine Gruppe.

Aufgabe H6 (Tetraederwinkel (4 Punkte))

Gegeben sei der Würfel W in $\mathbb{R}^3$ mit Kantenlänge 2 und Mittelpunkt $(0,0,0)$, d.h. die Menge

$$W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_i \in [-1,1] \text{ für } i = 1,2,3\}.$$

Verbinden wir nun die Ecken

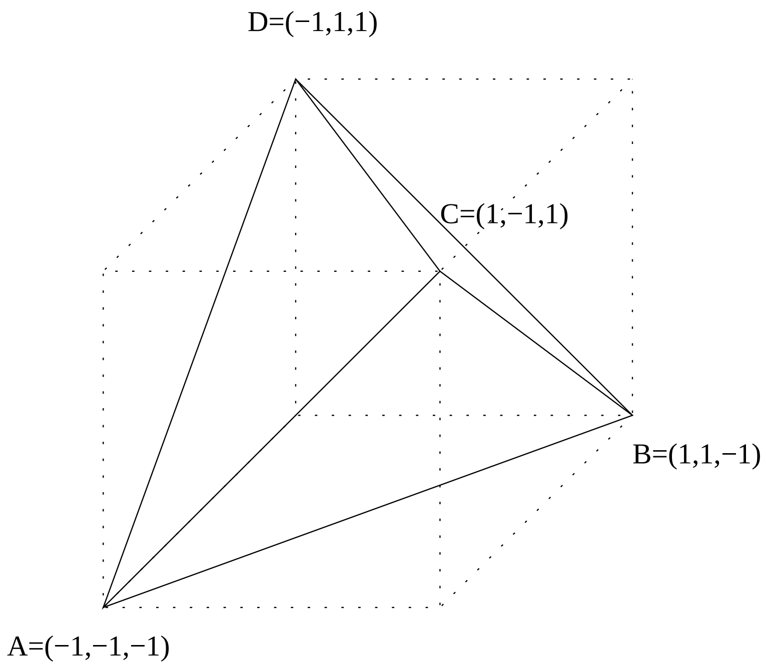
$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

miteinander, so erhalten wir ein Tetraeder (s. Skizze).

a) Wir versehen die 4 Eckpunkte A, B, C und D jeweils mit der Masse 1. Bestimmen Sie den Schwerpunkt dieser 4 Punkte.

b) Wählen Sie sich zwei beliebige, verschiedene Ecken des Tetraeders aus. Betrachten Sie nun die beiden Geraden, die jeweils durch eine der Ecken und den Mittelpunkt des Tetraeders gehen. Bestimmen Sie den Winkel, in dem sich die beiden Geraden schneiden (dieser Winkel heisst Tetraederwinkel).

Zusatzaufgabe: Hängt der Wert des Tetraederwinkels von der Wahl der Ecken ab? Begründen Sie ihre Antwort.



Lösung:

a) Der Schwerpunkt S ist gegeben durch

$$S = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wir wählen die Ecken $A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die Geraden sind dann durch die Parameterdarstellungen $g_A = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $g_B = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben. Mit Hilfe des Skalarproduktes erhalten wir

$$\cos\left(\measuredangle\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Damit ist der Tetraederwinkel gegeben durch $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109,471°$.

Zusatzaufgabe: Da das Skalarprodukt von jeweils zwei verschiedenen Ortsvektoren der Ecken des Tetraeders gleich ist und die Ecken auf dem Rand eines Würfels liegen, d.h. die Länge der Ortsvektoren auch gleich ist, hängt der Wert des Tetraederwinkels nicht von der Wahl der Ecken ab. Dies rechtfertigt auch die Bezeichnung Tetraederwinkel.