Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
18./19.10.2007

1. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Körper)

Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ mit $\mathbb{N}$ und die Menge der ganzen Zahlen $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ mit $\mathbb{Z}$. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist gegeben durch $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Die Menge der reellen Zahlen notieren wir mit $\mathbb{R}$.

a) Machen Sie sich klar, daß $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ keine Körper sind, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ dagegen schon.

b) Welche der nachfolgenden Gleichungen ist jeweils in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ lösbar?

1.) $x + 1 = 0$ 2.) $x^2 = 4$ 3.) $x^2 = 2$ 4.) $x^3 + 7x^2 - 3x - 21 = 0$

c) Kennen Sie eine Gleichung, die nicht in $\mathbb{R}$ lösbar ist?

Lösung:

a) Die Menge $\mathbb{N}$ ist kein Körper, da es ausser der 0 kein Element gibt, welches ein additiv Inverses besitzt. Das additiv Inverse zu n wäre $-n$, dies ist jedoch keine natürliche Zahl.

Dafür ist $-n$ eine ganze Zahl, d.h. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe. Da für $m, n \in \mathbb{Z}$

$$m + n = n + m$$

gilt, ist $(\mathbb{Z}, +)$ eine abelsche Gruppe. Bezüglich der Multiplikation bildet $\mathbb{Z}$ jedoch keine Gruppe, denn ausser ± 1 besitzt kein Element in $\mathbb{Z}$ ein multiplikativ Inverses, denn dieses wäre für $z \in \mathbb{Z}$ der Bruch $\frac{1}{z}$.

Ein Bruch ist jedoch eine rationale Zahl, also in $\mathbb{Q}$ enthalten. Demnach ist $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe. Ebenso kann man zwei Brüche addieren und es gilt $q - q = 0$ für $q \in \mathbb{Q}$, d.h. $(\mathbb{Q}, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Somit ist $\mathbb{Q}$ ein Körper.

Für zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt ebenfalls, dass sie bezüglich der Addition und Multiplikation vertauschen, d.h. dass sowohl $x + y = y + x$, als auch $x \cdot y = y \cdot x$ gilt.

Das inverse Element bezüglich der Addition zu $x \in \mathbb{R}$ ist $-x$ und ist ebenfalls eine reele Zahl, genauso wie das multiplikativ inverse Element $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Die Gültigkeit des Distributivgesetzes ist bereits aus der Schule bekannt.

b) 1.) Es gilt

$$\begin{aligned} x+1=0 &\Leftrightarrow x+1-1=-1 \\ &\Leftrightarrow x=-1. \end{aligned}$$

Diese Umformung ist in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ möglich und die Lösung $x=-1$ ist ebenfalls in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Demnach ist die Gleichung in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ lösbar.

2.) Es gilt

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ und } x_2 = -2.$$

Es ist x_1 in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$; jedoch x_2 nur in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Demnach hat die Gleichung eine Lösung in $\mathbb{N}$ und zwei Lösungen in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

3.) Es gilt

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2} \text{ und } x_2 = -\sqrt{2}.$$

Wie aus der Schule bekannt sein sollte, ist $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellbar. Demnach ist $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$, aber in $\mathbb{R}$. Also ist die Gleichung in $\mathbb{R}$ lösbar.

4.) Wir betrachten die Teiler des absoluten Gliedes. Diese sind $\{\pm 1, \pm 3, \pm 7\}$. Ausprobieren liefert die Nullstelle $x_1 = -7$. Durch Polynomdivision erhalten wir

$$x^3 + 7x^2 - 3x - 21 = (x+7)(x^2-3).$$

Hieraus erhalten wir die beiden Nullstellen $x_2 = \sqrt{3}$ und $x_3 = -\sqrt{3}$. Es ist x_1 in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, aber x_2, x_3 nur in $\mathbb{R}$. Damit hat die Gleichung eine Lösung in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und drei Lösungen in $\mathbb{R}$.

c) Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Aufgabe G2 (Kombinatorik)

a) Wie viele verschiedene Teilmengen hat eine dreielementige Menge? Geben Sie konkret die Teilmengen von $\{A, B, C\}$ an.

b) Geben Sie alle Permutationen der drei Elemente (A, B, C) an.

Lösung:

a) Eine n-elementige Menge hat 2^n Teilmengen. Demnach hat eine dreielementige Menge $2^3 = 8$ Teilmengen. Dies sind die Mengen

$$\begin{aligned} &\{\} \\ &\{A\}, \{B\}, \{C\} \\ &\{A,B\}, \{B,C\}, \{A,C\} \\ &\{A,B,C\}. \end{aligned}$$

b) Es gibt $n!$ verschiedene Permutationen, d.h. in diesem Fall $3! = 6$ Stück. Die Permutationen lauten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3 (Gruppen)

Sei ${}_A\triangle_B^C$ ein gleichseitiges Dreieck.

a) Mit $\{d_0, d_{\frac{2\pi}{3}}, d_{\frac{4\pi}{3}}\}$ bezeichnen wir die Menge der Drehungen des gegebenen Dreiecks in der Ebene um jeweils 0, $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ (Hierbei gilt $\frac{2\pi}{3} = 120°$ und $\frac{4\pi}{3} = 240°$). Geben Sie die Verknüpfung an, bzgl. derer diese Drehungen eine Gruppe bilden.

   Geben Sie nun das neutrale Element dieser Gruppe und das inverse Element von $d_{\frac{4\pi}{3}}$ bzgl. dieser Verknüpfung an.

b) Überlegen Sie sich, dass die Drehungen aus a) und die Spiegelungen, die das Dreieck auf sich selbst abbilden, wieder eine Gruppe bilden.

c) Geben Sie alle Möglichkeiten an, die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit den drei Buchstaben A, B, C zu versehen, indem Sie die jeweiligen Dreiecke zeichnen.

   Welches dieser Dreiecke ist mit einer der unter b) beschriebenen geometrischen Operationen aus dem Dreieck ${}_A\triangle_B^C$ zu erreichen?

Lösung:

a) Die Verknüpfung ist die Hintereinanderausführung. Das neutrale Element ist die Drehung d_0 um 0 und das inverse Element zu $d_{\frac{4\pi}{3}}$ ist die Gegendrehung um $-\frac{4\pi}{3}$. Da Drehungen die Periode 2π haben, ist die Gegendrehung um $-\frac{4\pi}{3}$ dasselbe, wie die Drehung um $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3} = d_{\frac{2\pi}{3}}$.

b) Das die Drehungen eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung bilden ist nach a) klar, denn es ist d_0 das neutrale Element, d.h. $d_0^{-1} = d_0$ und es ist $d_{\frac{2\pi}{3}}^{-1} = d_{\frac{4\pi}{3}}$ und umgekehrt.

   Die Spiegelungen, die das Dreieck in sich selbst überführen sind gerade die Spiegelungen an den Mittelsenkrechten der Seiten a, b, c. Wir bezeichnen diese mit s_a, s_b und s_c.

   Zweimaliges spiegeln führt wieder zum Ausgangsdreieck, d.h. zweimaliges spiegeln wirkt wie das neutrale Element. Somit ist $s_a^2 = s_b^2 = s_c^2 = d_0$.

   Damit sind auch schon die jeweiligen inversen Elemente gefunden.

   Nun haben wir gezeigt, dass sowohl Drehungen, als auch Spiegelungen enthalten sind. Es bleibt, die Abgeschlossenheit zu zeigen, d.h. das durch beliebige Kombination der Elemente wieder ein anderes Element der Gruppe entsteht.

   Anhand der Drehungen wissen wir dies schon. Wenn wir nun zwei verschiedene Spiegelungen verknüpfen, z. Bsp. $s_a \circ s_b$, so erhalten wir aus dem Dreiech ${}_A\triangle_B^C$ das Dreieck ${}_B\triangle_C^A$. D.h. es gilt $s_a \circ s_b = d_{\frac{4\pi}{3}}$. Analog für die anderen Fälle.

   Wenn wir eine Drehung und eine Spiegelung verknüpfen, so erhalten wir wieder eine Spiegelung. Bsp: $d_{\frac{2\pi}{3}} \circ s_a$. Wir erhalten das Dreieck ${}_B\triangle_A^C$, das gleiche wie nach s_c, d.h. es gilt $d_{\frac{2\pi}{3}} \circ s_a = s_c$. Somit haben wir die Abgeschlossenheit gezeigt.

c) Gemäß Aufgabe G2 gibt es folgende Möglichkeiten:

$$_A\triangle^C_B, \qquad _B\triangle^C_A, \qquad _B\triangle^A_C, \qquad _C\triangle^A_B, \qquad _A\triangle^B_C, \qquad _C\triangle^B_A.$$

Folgende Dreiecke lassen sich erreichen:

Dreieck	Operation
$_A\triangle^C_B$	d_0
$_B\triangle^C_A$	s_c
$_B\triangle^A_C$	$d_{\frac{4\pi}{3}}$
$_C\triangle^A_B$	$d_{\frac{2\pi}{3}} \circ s_c$
$_A\triangle^B_C$	s_a
$_C\triangle^B_A$	$d_{\frac{2\pi}{3}}$

Hausübung

Aufgabe H1 (Permutations- und Symmetriegruppen (4 Punkte))

Seien $d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ und $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Permutationen der Menge $\{1,2,3,4\}$.

a) Betrachten Sie ein Quadrat in der Ebene mit den Eckpunkten $1 = (1,1), 2 = (-1,1)$, $3 = (-1,-1)$ und $4 = (1,-1)$. Was beschreiben die Permutationen d und s, wenn man sie auf die Eckpunkte des Quadrates anwendet?

b) Gilt $d \circ s = s \circ d$?

c) Betrachten Sie die Diedergruppe

$$D_4 = \{d^i \circ s^j \ : \ 0 \leq i < 4, 0 \leq j < 2\},$$

wobei $d^i = \underbrace{d \circ d \circ \cdots \circ d}_{i \text{ mal}}$ ist. Zeigen Sie, dass die Diedergruppe D_4 die Symmetriegruppe des Quadrates ist. Wieviele Elemente enthält D_4?

d) Zeigen Sie nun, dass $S_4 \neq D_4$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass D_4 eine echte Teilmenge von S_4 ist.

Lösung:

a) Die Permutation d beschreibt eine Rotation und die Permutation s eine Spiegelung an der Diagonalen durch die Eckpunkte 1 und 3.

b) Es gilt

$$d \circ s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad s \circ d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demnach ist $d \circ s \neq s \circ d$.

c) Für die Diedergruppe D_4 gilt

$$D_4 = \{d^0, d^1, d^2, d^3, d^0 s, d^1 s, d^2 s, d^3 s\}.$$

Demnach hat die Diedergruppe $2 \cdot 4 = 8$ Elemente. Dabei entsprechen die einzelnen Elemente folgenden Symmetrien:

Element	Symmetrie
d^0	Drehung um 0 Grad
d^1	Drehung um 90 Grad
d^2	Drehung um 180 Grad
d^3	Drehung um 270 Grad
$d^0 s$	Spiegelung an der Diagonalen durch 1 und 3
$d^1 s$	Spiegelung an der Geraden durch die Mittelpunkte der Seiten 13 und 24
$d^2 s$	Spiegelung an der Diagonalen durch 2 und 4
$d^3 s$	Spiegelung an der Geraden durch die Mittelpunkte der Seiten 12 und 34

Hieran erkennen wir, dass alle 4 Drehsymmetrien und alle 4 Symmetrieachsen vorkommen.

d) Die Diedergruppe D_4 ist die Symmetriegruppe des Quadrates. Sie wird erzeugt von der Rotation d und der Spiegelung s, welche die Eckpunkte ineinander überführen. Bei einer Rotation wird keine Ecke festgehalten und bei einer Spiegelung werden zwei Ecken festgehalten.

Dies gilt auch für die Hintereinanderausführung. Demnach kann die Gruppe D_4 keine Permutation enthalten, die nur eine Ecke festhält, wie z.Bsp.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Demnach ist $D_4 \subsetneq S_4$ und somit auch $D_4 \neq S_4$.

Aufgabe H2 (Logik (4 Punkte))

In der Logik hat man es mit Aussagen und Operationen zu tun. Unter einer mathematischen Aussage verstehen wir ein "Gebilde", dem man eindeutig einen der Werte wahr (w) oder falsch (f) zuordnen kann. Wir bezeichnen sie im Folgenden mit Großbuchstaben A,B,.... Aussagen können mit folgenden Operationen verknüpft werden:

Name	Symbol	Aussage
Konjugation	$A \wedge B$	A "und" B
Disjunktion	$A \vee B$	A "oder" B
Negation	$\neg A$	"nicht" A
Implikation	$A \Rightarrow B$	"falls A wahr ist, ist auch B wahr"="aus A folgt B"
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A ist genau dann wahr, wenn B wahr ist

Unter diesen Operationen gibt es eine Rangfolge (ähnlich wie für die Rechenoperationen auf den reellen Zahlen die "Punkt vor Strich" Regel). Wenn nicht durch Klammern anders geregelt, so werden die Operationen in folgender Reihenfolge ausgeführt:

$$\neg \quad \rightarrow \quad \wedge \quad \rightarrow \quad \vee \quad \rightarrow \quad \Rightarrow \quad \rightarrow \quad \Leftrightarrow$$

a) Ergänzen Sie folgende Tabelle (w steht für wahr und f steht für falsch):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w			w	w	
w	f				f	
f	w					
f	f					w

b) Folgern Sie aus a) : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
Zusatzfrage: Welche Beweistechnik verbirgt sich hinter dieser Äquivalenz?

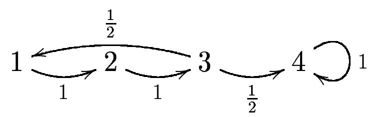
Lösung:

a) Es gilt

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

b) Aus den letzten beiden Spalten der Wahrheitstafel in a) folgt sofort die Äquivalenz. Dies ist der „indirekte Beweis".

Aufgabe H3 (Irrfahrten (4 Punkte))
Betrachten Sie die vier Zustände 1, 2, 3 und 4 mit den angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten:



a) Starten Sie mit einem Teilchen in Position 2. Wie lauten die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für das Teilchen nach 2 bzw. 5 Schritten?

b) Stellen Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse aus a) eine Vermutung über das weitere Verhalten des Teilchens auf. Gibt es einen stabilen Zustand des Systemes? Begründen Sie Ihre Vermutung und geben Sie gegebenenfalls einen stabilen Zustand an.

Lösung:

a) Starten wir mit einem Teilchen in Position 2, d.h. mit dem Wahrscheinlichkeitsvektor $(0, 1, 0, 0)$, so erhalten wir die folgenden Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nach n Schritten:

$$\begin{array}{ll} n = 0 & (0, 1, 0, 0) \\ n = 1 & (0, 0, 1, 0) \\ n = 2 & (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}) \\ n = 3 & (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \\ n = 4 & (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ n = 5 & (\frac{1}{4}, 0, 0, \frac{3}{4}) \end{array}$$

b) In a) sehen wir, dass die Wahrscheinlichkeit sich in Position 4 aufzuhalten alle 3 Schritte wächst. Demnach konvergiert diese Irrfahrt gegen einen stabilen Zustand, nämlich den Zustand in Position 4 zu verbleiben.

Betrachten wir die Teilfolge $n_k = 2 + 3k$, so erhalten wir hierfür die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

$$\left(\frac{1}{2^{k+1}}, 0, 0, \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2^{j+1}}\right) \qquad \text{für } k = 0, 1, \ldots$$

Ein stabiler Zustand ist der Vektor $(0, 0, 0, 1)$.