Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08
24./25.01.2008

7. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G20 (Matrizenkalkül)
Bilden Sie alle möglichen Matrizenprodukte der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4i & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 7 & -1i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1i & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G21 (Lineare Abbildungen und Matrizen)
Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie, falls möglich, Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^2$ an, sodass M die Drehung um 90° darstellt.

b) Geben Sie, falls möglich, Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^2$ an, sodass M die Projektion auf die x-Achse darstellt.

Aufgabe G22 (Abbildungsmatrix eines Funktionals)
Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} I : \mathcal{P}_4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \int_0^1 p(x)\; dx. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von I bzgl. der Basen $\mathcal{B} = \{x^j : j = 0, 1, \ldots, 4\}$ von $\mathcal{P}_4$ und $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{60}\}$ von $\mathbb{R}$.

Hausübung

Aufgabe H20 (Abbildungsmatrizen (4 Punkte))

Geben Sie zu den folgenden linearen Abbildungen $T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ und die Abbildungsmatrix $M_{T_i}^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ an:

a) Die orthogonale Projektion T_1 auf den Unterraum $W = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Die orthogonale Projektion T_2 auf den Unterraum $W^\perp$.

c) Bestimmen Sie $T_1 + T_2$. Was müssen Sie beachten? Was fällt ihnen auf? Erklären Sie ihre Beobachtung.

Hinweis: Sie können die Basis $\mathcal{B}$ so wählen, dass die Matrizen $M_{T_i}^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonal sind.

Aufgabe H21 ((Bernstein)Polynome (4 Punkte))

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} D : \mathcal{P}_n &\longrightarrow \mathcal{P}_n \\ p &\longmapsto p' \end{aligned}$$

auf dem Raum $\mathcal{P}_n$ der Polynome vom Höchstgrad n.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von D bzgl. der Standardbasis $\mathcal{B} = \{x^j : j = 0, \ldots, n\}$.

b) Zeigen Sie, dass die Polynome

$$b_k(t) := \binom{3}{k}(1-t)^{3-k}t^k \quad \text{für } k = 0, 1, 2, 3$$

ein Basis von $\mathcal{P}_3$ bilden (Die Polynome b_k heißen Bernsteinpolynome vom Grad 3).

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}' = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$.

Aufgabe H22 (Matrizenkalkül (4 Punkte))

Gegeben seien die Matrizen $A = (\alpha_{ij})_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B = (\beta_{ij})_{ij} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ und $C = (\gamma_{ij})_{ij} \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.

a) Zeigen Sie, dass $(A \cdot B)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jk}$ ist.

b) Zeigen Sie das Assoziativgesetz $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.