Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
10./11.01.2008

6. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Kern, Bild, Rang und Orthogonalität)

Gegeben sei eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- □ Ist φ injektiv, so ist $\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$.
- □ Ist Ker $\varphi = \{0\}$, so ist φ ein Isomorphismus.
- □ Die orthogonale Projektion in $\mathbb{R}^2$ auf eine Ursprungsgerade hat Rang 2.
- □ Orthogonale Vektoren werden durch lineare Abbildungen auf orthogonale Vektoren abgebildet.
- □ Gilt $\dim W = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$, so ist φ surjektiv.
- □ Jede surjektive lineare Abbildung eines endlichdimensionalen Vektorraumes in sich selbst ist ein Isomorphismus.
- □ Für $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2, (z_1, z_2, z_3)^t \mapsto (z_1 - z_3, z_2 - z_3)^t$ ist $\varphi^{-1}((i, -i)^t) = \{(z_1, z_2, z_3)^t \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 = 2i\}$.

Aufgabe G18 (Fourierreihen)

Gegeben sei der Vektorraum $V = C([0, 2\pi])$ der 2π-periodischen, stetigen Funktionen und der Vektor

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

in V.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten (d.h. die Fourierkoeffizienten) von f bzgl. der Orthonormalbasis $e_0, e_1, \ldots$ aus Beispiel 2.23 im Skript.

b) Bestimmen Sie eine Funktion $0 \neq g \in V$, die senkrecht zu f ist.

c) Zeichnen Sie die Graphen von f, g und $f \cdot g$. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe G19 (Skalarprodukt)

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Wir definieren für zwei Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ das Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle_a := 2v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_1 + 4v_2w_2.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$, die bzgl. des oben angegebenen Skalarproduktes orthonormal ist und zeichnen Sie die Basisvektoren in ein Koordinatensystem ein.

b) Bestimmen Sie für $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ das Skalarprodukt $\langle u_1, u_2 \rangle_a$ mit Hilfe des Standardskalarproduktes von $\mathbb{R}^2$.

c) Zeigen Sie, dass sich das Skalarprodukt zweier allgemeiner Vektoren mit Hilfe des Standardskalarproduktes bestimmen lässt.

Hausübung

Aufgabe H17 (Kern und Bild (4 Punkte))

Bestimmen Sie Kern und Bild zu den folgenden linearen Abbildungen und entscheiden Sie, welche der Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

a) Die orthogonale Projektion $\pi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ auf den Unterraum, der durch die ersten beiden Basisvektoren aufgespannt wird.

b) Der Ableitungsoperator $D : \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ auf dem Raum der Polynome vom Höchstgrad 5.

c) Der Rechtsshift $S : V \to V, (a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, \ldots)$ auf dem Folgenraum $V := \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{C}\}$.

Aufgabe H18 (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren (4 Punkte))

Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2i \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{C}^4$.

a) Sind die Vektoren b_1, b_2, b_3 linear unabhängig?

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $V := \operatorname{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$.

c) Wie lautet das Bild des Vektors $v := \begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ unter der orthogonalen Projektion auf V?

d) Auf welche Weise könnte man nun eine Orthonormalbasis von $V^\perp$ bestimmen?

Aufgabe H19 (Basen und Isomorphismen (4 Punkte))

Gegeben sei ein endlichdimensionaler Vektorraum V, eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und eine bijektive lineare Abbildung $\varphi : V \to V$.

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ ebenfalls eine Basis von V bilden.