Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2007/08
13./14.12.2007

5. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Basen, Erzeugendsysteme und Dimension)
Welcher der folgenden Aussagen ist richtig?

- □ Jedes Erzeugendensystem ist eine Basis.
- □ Jede Basis ist ein Erzeugendensystem.
- □ $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{C}^3$.
- □ $\operatorname{lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ hat Dimension 3.
- □ $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^2$ bzgl. des Standardskalarproduktes.

Aufgabe G14 (Injektivität und Surjektivität)
Geben Sie zwei Beispiele von Vektorräumen V, W und linearen Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ an mit:

a) φ ist nicht injektiv,

b) φ ist nicht surjektiv.

Aufgabe G15 (Lineare Abbildungen und Basen)
Gegeben seien die Vektorräume $V := \mathbb{R}^3$ und $W := \mathbb{R}^2$. Sei $\mathbb{R}^3$ mit der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis ausgestattet. Sei weiterhin $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(b_1) := \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Betrachten Sie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ in der Darstellung von $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie das Bild von v unter φ.

b) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ bereits vollständig durch die Angabe der Bilder $\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3)$ der Basisvektoren b_1, b_2, b_3 definiert ist. Geben Sie hierzu das Bild eines beliebigen Vektors $v \in V$ an.

c) Betrachten Sie nun V mit der Standardbasis e_1, e_2, e_3. Geben Sie die Bilder der Standardbasisvektoren unter der linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ an.

Aufgabe G16 (Untervektorräume)

Betrachten Sie den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und den Untervektorraum U, der durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt ist. Sei W der Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ der durch die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

a) Bestimmen Sie eine Basis für den Untervektorraum $U \cap W$.

b) Bestimmen Sie eine Basis für den Untervektorraum

$$U + W := \{u + w : \; u \in U, \; w \in W\}.$$

Beachten Sie, dass $U + W \neq U \cup W$ ist.

Hausübung

Aufgabe H13 (Skalarprodukte (4 Punkte))

Entscheiden und begründen Sie, ob die angegebenen Verknüpfungen Skalarprodukte sind:

i) Der Vektorraum der komplexen Folgen $V := \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{C}, x_i\}$ mit der Verknüpfung
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

ii) Der Vektorraum $W := \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{C}, x_i \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i\}$ mit der Verknüpfung
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

iii) Sei $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen Polynome. Für zwei Polynome $p_1(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ und $p_2(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sei
$$\langle p_1(x), p_2(x)\rangle := \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$$
definiert, wobei $a_i = 0$ für $i > n$ und $b_i = 0$ für $i > m$ ist.

iv) Der Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit der Verknüpfung
$$\langle x, y\rangle := 1 + x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}.$$

v) Der Vektorraum $\mathbb{R}^n = \mathrm{lin}(e_1, \ldots, e_n)$ mit der Verknüpfung
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \vec{e}_i.$$

Aufgabe H14 (Basen (4 Punkte))

Gegeben sei der Raum $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ vom Höchstgrad 3.

a) Zeigen Sie, dass die Mengen
$$\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2 := \{1, x-3, (x-3)^2, (x-3)^3\}$$
Basen von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sind.

b) Stellen Sie das Polynom $p(x) := x(x-1)(x-2)$ bzgl. beider Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ dar.

Aufgabe H15 (Folgenräume (4 Punkte))

Gegeben sei der Vektorraum $V := \{a := (a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}\}$ der reellen Folgen.

a) Es sei $e_j \in V$ definiert durch
$$(e_j)_{i\in\mathbb{N}} := \delta_{ji},$$
d.h. e_j ist der Vektor, der an der j. Stelle eine 1 und sonst 0 hat. Charakterisieren Sie $\mathrm{lin}(\{e_j : j \in \mathbb{N}\})$. Ist das System $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Basis von V?

b) Betrachten Sie nun $U := \{a \in V : a_i = a_{i+5} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}$. Was ist die Dimension von U? Geben Sie eine Basis an.

Aufgabe H16 (Weihnachtsaufgabe (4 Bonuspunkte) *Abgabe nach den Ferien*)

Gegeben seien die Punkte

$A = (-1, -\sqrt{3})$	$B = (-1 - 2\sqrt{3}, -\sqrt{3} + 2)$	$C = (-8 - 2\sqrt{3}, -8\sqrt{3} + 2)$
$D = (-5 - 3\sqrt{3}, -5\sqrt{3} + 3)$	$E = (-6 - 3\sqrt{3}, -6\sqrt{3} + 3)$	$F = (-3 - 4\sqrt{3}, -3\sqrt{3} + 4)$
$G = (-4 - 4\sqrt{3}, -4\sqrt{3} + 4)$	$H = (-1 - 5\sqrt{3}, -\sqrt{3} + 5)$	$I = (-2 - 5\sqrt{3}, -2\sqrt{3} + 5)$
$J = (-6\sqrt{3}, 6)$	$K = (2 - 5\sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 5)$	$L = (1 - 5\sqrt{3}, \sqrt{3} + 5)$
$M = (4 - 4\sqrt{3}, 4\sqrt{3} + 4)$	$N = (3 - 4\sqrt{3}, 3\sqrt{3} + 4)$	$O = (6 - 3\sqrt{3}, 6\sqrt{3} + 3)$
$P = (5 - 3\sqrt{3}, 5\sqrt{3} + 3)$	$Q = (8 - 2\sqrt{3}, 8\sqrt{3} + 2)$	$R = (1 - 2\sqrt{3}, \sqrt{3} + 2)$
$S = (1, \sqrt{3})$		

Gibt es eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bzgl. derer die Punkte ganzahlige Koordinaten haben?

Tipp: Tragen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinden Sie sie in alphabetischer Reihenfolge.

Wir wünschen Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr.