Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
29./30.11.2007

4. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Lineare Gleichungssysteme)

Gegeben seien die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\text{a)}\ \begin{array}{rrrcl} ix_1 & +2x_2 & & = & 0 \\ 1x_1 & -ix_2 & +ix_3 & = & 0 \\ 1x_1 & +ix_2 & +3ix_3 & = & 0 \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{rrrcl} x_1 & & +x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 5\,. \end{array}$$

Geben Sie den Lösungsraum für a) in $\mathbb{C}^3$ und für b) in $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe G11 (Lineare Unabhängigkeit)

Welche der folgenden Familien von Vektoren sind linear unabhängig?

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

b) $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2-3i \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$

c) $x^2-1, x+1, x-1, 1 \ \in P(\mathbb{R})$

Aufgabe G12 (Kreuzprodukt und bilineare Abbildungen)

Gegeben seien die Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ und eine bilineare Abbildung $B : V \times V \to W$ zwischen den Vektorräumen V und W über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie: $B(x,x) = 0$ gilt genau dann, wenn $B(x,y) = -B(y,x)$ ist.

Zusatzfrage: Gilt dies auch für Bilinearformen $B : V \times V \to \mathbb{K}$?

b) Wir definieren ε_{ijk} für $(i,j,k) \in \{1,2,3\}^3$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} &= 1 \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} &= -1 \\ \varepsilon_{ijk} &= 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

i) Zeigen Sie:

$$x \times y = \sum_{i,j,k=1}^{3} x_i y_j \vec{e}_k \varepsilon_{ijk}$$

ii) Zeigen Sie:

$$\langle e_i \times e_j, e_k \rangle = \varepsilon_{ijk}$$

Hausübung

Aufgabe H7 (Parameterabhängige lineare Gleichungssysteme (4 Punkte))

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ & 2x_2 & -1x_3 & = & 2 \\ x_1 & +4x_2 & +\alpha x_3 & = & \alpha \end{array}$$

in Abhängigkeit des reellen Parameters α.

Aufgabe H8 (Kern und Bild (4 Punkte))

Seien V, W Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir bezeichnen mit

$$\text{Ker } \varphi := \{v \in V : \varphi(v) = 0\} \subset V$$

den *Kern von* φ und mit

$$\text{Bild } \varphi := \{w \in W : \text{es gibt ein } v \in V \text{ mit } \varphi(v) = w\} \subset W$$

das *Bild von* φ.

a) Gegeben sei die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y, 0)$. Bestimmen Sie Ker ψ und Bild ψ.

b) Zeigen Sie, dass im allgemeinen der Kern einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ ein Untervektorraum von V und das Bild ein Untervektorraum von W ist.

Aufgabe H9 (Spatprodukt (4 Punkte))

Gegeben seien die Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\langle x \times y, z\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ist.

b) Überlegen Sie sich, dass

$$\langle x \times y, z\rangle = \|x \times y\| \; \|z\| \; \cos\varphi$$

ist, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $x \times y$ und z ist. Zeigen Sie, dass durch diese Formel bestätigt wird, dass das Spatprodukt das Volumen des von den Vektoren x, y, z aufgespannten Parallelepipeds ist.