Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
15./16.11.2007

3. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Abbildungen)

Nachfolgend werden verschiedene Abbildungen beschrieben. Hierbei bezeichnen f, g immer Funktionen, sowie x, y, z Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Die Abbildungen sind jeweils auf geeigneten Räumen definiert.

Ordnen Sie die Abbildungen auf der linken Seite den Abbildungstypen auf der rechten Seite in eineindeutiger Art und Weise zu, d.h. ordnen Sie jeder Funktion genau einen Typ zu:

$\boxed{f \mapsto \int_a^b f(t)\ dt}$	symmetrische Bilinearform
$\boxed{(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\ dt}$	lineare Abbildung
Spiegelung in $\mathbb{R}^2$ an einer Ursprungsgeraden	Tensor 3. Stufe
$\boxed{(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\ dt}$	alternierende 3-Form
$\boxed{(x,y,z) \mapsto 17x_3y_2z_1 + x_2y_1z_3}$	Linearform
$(x,y,z) \mapsto x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3$	antisymmetrische Bilinearform

Aufgabe G8 (Normen und Metrik)

Wir betrachten die euklidische Norm $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

a) Prüfen Sie nach, dass $\|\cdot\|_2$ die Eigenschaften einer Norm besitzt.

b) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer Norm $\|\cdot\|$. Dann kann man als *Abstand*

$$d : V \times V \to [0, \infty), (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

definieren. Geben Sie im Falle $V = \mathbb{R}^2$ und der Norm $\|\cdot\|_2$ an, welche geometrische Interpretation der Metrik die drei Normeigenschaften zur Folge haben.

Aufgabe G9 (Untervektorräume)

a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$H_0 := \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bildet die Menge

$$H_1 := \{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

auch einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?

c) Gegeben sei $V = \mathbb{C}^n$ und $a \in V$. Zeigen Sie, dass die Menge $H_a := \{v \in V : \langle v, a \rangle = 0\}$ einen Untervektorraum von V bildet.

d) Gegeben sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V und Untervektorräume U_1 und U_2 von V.

i) Zeigen Sie, dass die Menge $S := U_1 \cap U_2$ ebenfalls einen Untervektorraum bildet.

ii) Gilt dies auch für den Durschnitt endlich vieler Untervektorräume? Was ist mit $U_1 \cup U_2$?

Hausübung

Aufgabe H7 (Orthogonale Zerlegung und Projektion)
Gegeben seien die folgenden Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \; v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie die orthogonale Zerlegung von v_1 bzgl. v_2 und von v_1 bzgl. v_3.

b) Sei H die Ebene, die von den Vektoren v_2 und v_3 aufgespannt wird. Können Sie das Bild von v_1 auf H bestimmen (Skizze)?

Aufgabe H8 (Normen und Skalarprodukt (4 Punkte))

a) Zeigen Sie, dass das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{R}$ durch

$$x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{1}$$

eine Norm

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty), x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

definiert. Kennen Sie diese Norm?

b) Wir setzen das Skalarprodukt durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Warum ist hiermit durch (1) keine Norm definiert?

c) Betrachten Sie das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Induziert dieses Skalarprodukt durch (1) eine Norm?

Tipp: Für ein beliebiges Skalarprodukt gilt $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

Aufgabe H9 (Koordinaten (4 Punkte))
Betrachten Sie die Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ in $\mathbb{C}^n$ über dem Körper $\mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass jeder Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ als Linearkombination $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ angegeben werden kann.

b) Zeigen Sie, dass diese Darstellung als Linearkombination eindeutig ist, indem Sie für zwei verschiedene Darstellungen zeigen, dass alle Koeffizienten übereinstimmen müssen.
In diesem Fall heissen die Koeffizienten λ_i die *Koordinaten* von v bzgl. $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Tipp: Nutzen Sie aus, dass $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ ist.