Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
01./02.11.2007

2. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Gruppen II)

Entscheiden Sie, ob es sich bei den nachfolgenden Mengen um Gruppen handelt.

i) Gegeben sei die Menge $\mathcal{F}_0$ aller Funktionen von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ nach $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wir versehen $\mathcal{F}_0$ mit der punktweisen Multiplikation $*$, d.h. $(f * g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.

ii) Die Menge $X := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 10\} \subset \mathbb{Z}$ mit der Addition von $\mathbb{Z}$.

iii) $(\mathbb{C}, \oplus)$ wobei $z \oplus w := |z + w|$ ist.

iv) $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ mit der Multiplikation auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe G5 (Vektorräume)

Gegeben sei mit $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Polynome $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Entscheiden Sie welche der folgenden Teilmengen von $P(\mathbb{R})$ zusammen mit der Addition und skalaren Multiplikation von $P(\mathbb{R})$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bilden.

   i) $P_n(\mathbb{R}) := \{p \in P(\mathbb{R}) : \text{Grad } p \leq n\}, \ (n \in \mathbb{N})$

   ii) $P^0(\mathbb{R}) := \{p \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 0\}$

   iii) $P^1(\mathbb{R}) := \{p \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 1\}$

b) Entscheiden Sie, ob es sich in den nachfolgenden Fällen um Vektorräume handelt. Hierbei sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation ausgestattet.

   i) $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

   ii) $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Aufgabe G6 (Normen)

Gegeben seien die folgenden Funktionen $\|\cdot\|_i : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ durch

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\
\|x\|_2 &:= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
\|x\|_\infty &:= \max\{|x_i| : i = 1,\ldots,n\}.
\end{aligned}$$

a) Skizzieren Sie für den Fall $n = 2$ die Einheitskugeln $B_i := \{x \in \mathbb{R}^2 \; : \; \|x\|_i \leq 1\}$ für die Abbildungen $\|\cdot\|_i$.

b) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem Vektorraum V über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ und für alle $\lambda \in [0,1]$

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|$$

gilt. Versuchen Sie dazu, die Konstruktion $\lambda x + (1-\lambda)y$ geometrisch zu interpretieren.

c) Zeigen Sie, dass die Einheitskugel einer Norm konvex ist.

d) Ist die Abbildung

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^2$?

Tipp: Betrachten Sie $\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|$ im Hinblick auf Aufgabenteil c).

Hausübung

Aufgabe H4 (Lineare Abbildungen (4 Punkte))

Wir bezeichnen mit D^2 den Raum der zweimal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und mit $\mathcal{F} := \{\text{Funktionen von } \mathbb{R} \text{ nach } \mathbb{R}\}$ den Raum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Entscheiden Sie in jedem der nachfolgenden Fälle, ob es sich um eine lineare Abbildung zwischen den jeweiligen $\mathbb{R}$-Vektorräumen handelt:

i) $\delta_1 : D^2 \to \mathcal{F}, f \mapsto 3f'' + f'$.

ii) $\delta_2 : D^2 \to \mathcal{F}, f \mapsto e^{f''} + f'$.

iii) Für ein festes $x \in \mathbb{R}$ die Abbildung $A_x : \mathcal{F} \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(x)$.

Aufgabe H5 (Einheitengruppe (4 Punkte))

Gegeben sei eine Menge S mit einer assoziativen Verknüpfung $\cdot : S \times S \to S$ und einem neutralen Element e bzgl. $\cdot$. Wir bezeichnen mit

$$S^\times := \{s \in S \ :\ \text{es gibt ein } s' \in S \text{ mit } s \cdot s' = s' \cdot s = e\}$$

die Menge der invertierbaren Elemente von S bzgl. $\cdot$.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{R}^\times$ bzgl. der Multiplikation und $P(\mathbb{R})^\times$ bzgl. der punktweisen Multiplikation.

b) Zeigen Sie, dass $S^\times$ eine Gruppe bildet (die sogenannte Einheitengruppe).
Tipp: Zeigen Sie u.a., dass $S^\times$ bzgl. der Verknüpfung $\cdot$ abgeschlossen ist, d.h. dass für $s, t \in S^\times$ auch $s \cdot t \in S^\times$ ist.

Aufgabe H6 (Tetraederwinkel (4 Punkte))

Gegeben sei der Würfel W in $\mathbb{R}^3$ mit Kantenlänge 2 und Mittelpunkt $(0,0,0)$, d.h. die Menge

$$W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_i \in [-1,1] \text{ für } i = 1,2,3\}.$$

Verbinden wir nun die Ecken

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

miteinander, so erhalten wir ein Tetraeder (s. Skizze).

a) Wir versehen die 4 Eckpunkte A, B, C und D jeweils mit der Masse 1. Bestimmen Sie den Schwerpunkt dieser 4 Punkte.

b) Wählen Sie sich zwei beliebige, verschiedene Ecken des Tetraeders aus. Betrachten Sie nun die beiden Geraden, die jeweils durch eine der Ecken und den Mittelpunkt des Tetraeders gehen. Bestimmen Sie den Winkel, in dem sich die beiden Geraden schneiden (dieser Winkel heisst Tetraederwinkel).

Zusatzaufgabe: Hängt der Wert des Tetraederwinkels von der Wahl der Ecken ab? Begründen Sie ihre Antwort.