Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
18./19.10.2007

1. Übungsblatt zur „Linearen Algebra für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Körper)

Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ mit $\mathbb{N}$ und die Menge der ganzen Zahlen $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ mit $\mathbb{Z}$. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist gegeben durch $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Die Menge der reellen Zahlen notieren wir mit $\mathbb{R}$.

a) Machen Sie sich klar, daß $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ keine Körper sind, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ dagegen schon.

b) Welche der nachfolgenden Gleichungen ist jeweils in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ lösbar?

1.) $x + 1 = 0$ 2.) $x^2 = 4$ 3.) $x^2 = 2$ 4.) $x^3 + 7x^2 - 3x - 21 = 0$

c) Kennen Sie eine Gleichung, die nicht in $\mathbb{R}$ lösbar ist?

Aufgabe G2 (Kombinatorik)

a) Wie viele verschiedene Teilmengen hat eine dreielementige Menge? Geben Sie konkret die Teilmengen von $\{A, B, C\}$ an.

b) Geben Sie alle Permutationen der drei Elemente (A, B, C) an.

Aufgabe G3 (Gruppen)

Sei ${}_A\triangle_B^C$ ein gleichseitiges Dreieck.

a) Mit $\{d_0, d_{\frac{2\pi}{3}}, d_{\frac{4\pi}{3}}\}$ bezeichnen wir die Menge der Drehungen des gegebenen Dreiecks in der Ebene um jeweils 0, $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ (Hierbei gilt $\frac{2\pi}{3} = 120°$ und $\frac{4\pi}{3} = 240°$). Geben Sie die Verknüpfung an, bzgl. derer diese Drehungen eine Gruppe bilden.

Geben Sie nun das neutrale Element dieser Gruppe und das inverse Element von $d_{\frac{4\pi}{3}}$ bzgl. dieser Verknüpfung an.

b) Überlegen Sie sich, dass die Drehungen aus a) und die Spiegelungen, die das Dreieck auf sich selbst abbilden, wieder eine Gruppe bilden.

c) Geben Sie alle Möglichkeiten an, die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit den drei Buchstaben A, B, C zu versehen, indem Sie die jeweiligen Dreiecke zeichnen.

Welches dieser Dreiecke ist mit einer der unter b) beschriebenen geometrischen Operationen aus dem Dreieck ${}_A\triangle_B^C$ zu erreichen?

Hausübung

Aufgabe H1 (Permutations- und Symmetriegruppen (4 Punkte))

Seien $d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ und $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Permutationen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$.

a) Betrachten Sie ein Quadrat in der Ebene mit den Eckpunkten $1 = (1, 1), 2 = (-1, 1)$, $3 = (-1, -1)$ und $4 = (1, -1)$. Was beschreiben die Permutationen d und s, wenn man sie auf die Eckpunkte des Quadrates anwendet?

b) Gilt $d \circ s = s \circ d$?

c) Betrachten Sie die Diedergruppe

$$D_4 = \{d^i \circ s^j \ : \ 0 \leq i < 4, 0 \leq j < 2\},$$

wobei $d^i = \underbrace{d \circ d \circ \cdots \circ d}_{i \text{ mal}}$ ist. Zeigen Sie, dass die Diedergruppe D_4 die Symmetriegruppe des Quadrates ist. Wieviele Elemente enthält D_4?

d) Zeigen Sie nun, dass $S_4 \neq D_4$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass D_4 eine echte Teilmenge von S_4 ist.

Aufgabe H2 (Logik (4 Punkte))

In der Logik hat man es mit Aussagen und Operationen zu tun. Unter einer mathematischen Aussage verstehen wir ein "Gebilde", dem man eindeutig einen der Werte wahr (w) oder falsch (f) zuordnen kann. Wir bezeichnen sie im Folgenden mit Großbuchstaben A,B,.... Aussagen können mit folgenden Operationen verknüpft werden:

Name	Symbol	Aussage
Konjugation	$A \wedge B$	A "und" B
Disjunktion	$A \vee B$	A "oder" B
Negation	$\neg A$	"nicht" A
Implikation	$A \Rightarrow B$	"falls A wahr ist, ist auch B wahr"="aus A folgt B"
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A ist genau dann wahr, wenn B wahr ist

Unter diesen Operationen gibt es eine Rangfolge (ähnlich wie für die Rechenoperationen auf den reellen Zahlen die "Punkt vor Strich" Regel). Wenn nicht durch Klammern anders geregelt, so werden die Operationen in folgender Reihenfolge ausgeführt:

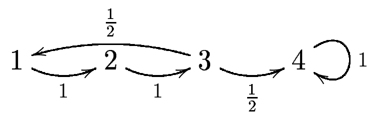
$$\neg \quad \rightarrow \quad \wedge \quad \rightarrow \quad \vee \quad \rightarrow \quad \Rightarrow \quad \rightarrow \quad \Leftrightarrow$$

a) Ergänzen Sie folgende Tabelle (w steht für wahr und f steht für falsch):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w			w	w	
w	f				f	
f	w					
f	f					w

b) Folgern Sie aus a) : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
Zusatzfrage: Welche Beweistechnik verbirgt sich hinter dieser Äquivalenz?

Aufgabe H3 (Irrfahrten (4 Punkte))
Betrachten Sie die vier Zustände $1, 2, 3$ und 4 mit den angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten:



a) Starten Sie mit einem Teilchen in Position 2. Wie lauten die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für das Teilchen nach 2 bzw. 5 Schritten?

b) Stellen Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse aus a) eine Vermutung über das weitere Verhalten des Teilchens auf. Gibt es einen stabilen Zustand des Systemes? Begründen Sie Ihre Vermutung und geben Sie gegebenenfalls einen stabilen Zustand an.