Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/2009 17.12.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

9. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G34 (Minitest)

Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.
Aus welchen der folgenden Aussagen folgt die Stetigkeit von f in x_0?
(Du solltest nicht länger als **10 Minuten** für den Minitest benötigen.)

- ☐ $(\exists\, \varepsilon > 0)\ (\forall\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- ☐ Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x, y \in D : |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- ☐ Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ ist.

Aufgabe G35 (Stetigkeit)

Die Funktion f ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}(1 - \sqrt{1+x}) & \text{für } x > 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Zeige, dass f stetig auf $(0, \infty)$ ist und bestimme a, so dass f stetig auf $[0, \infty)$ ist.

Aufgabe G36 (Folgen in $\mathbb{R}^n$ und Stetigkeit der Vektorfunktionen)

a) Wir betrachten die folgenden Folgen in $\mathbb{R}^2$:

$$a_n = (n,\ \frac{1}{n})^T,\ b_n = (\frac{1}{n^2},\ \frac{n}{1+n})^T,\ c_n = (\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n^2})^T,\ d_n = (\sin(\frac{n\pi}{4}),\ \cos(\frac{n\pi}{4}))^T.$$

1) Skizziere diese Folgen und entscheide welche von ihnen beschränkt sind.
2) Welche dieser Folgen sind konvergent und welche nicht? Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

b) Skizziere die zu den folgenden Vektorfunktionen $F(t) = (F_1(t), F_2(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gehörenden Punktmengen $\{(F_1(t), F_2(t)) \subset \mathbb{R}^2,\ t \in D(F)\}$. Sind diese Vektorfunktionen stetig?

1) $F(t) = A + Bt,\ t \in [0, 1]$ mit $A, B \in \mathbb{R}^2$,
2) $F(t) = (a\cos t, b\sin t),\ t \in [0, \pi]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$,
3) $F(t) = (\mathrm{sgn}t, \mathrm{sgn}t),\ t \in \mathbb{R}$.

Hausübungen

Aufgabe H35 (Funktionengrenzwert) (4+2+3P)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

gegeben.

a) Zeige, dass für $\alpha \leq 0$ keine Funktionsgrenzwert für $x \to 0$ existiert.

b) Zeige, dass für $\alpha > 0$ ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig.

c) Für welche α existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$? Bestimme für diese α den Grenzwert.

Aufgabe H36 (Fehlerabschätzung) (5P)

In einer Messung wurden die Grössen a, b und c zu $a = 2$, $b = 4$ und $c = 3$ bestimmt; dabei liegt der maximal mögliche (absolute) Fehler von a bei ± 0.5, von b bei ± 0.2 und von c bei $-0.5, +0.2$. Die Werte werden in die Funktion

$$f(a, b, c) = \frac{a^2 + 1}{b^2 + 3}\sqrt{\frac{2}{c} + 4}$$

eingesetzt. Bestimme den Wert sowie die Fehlerschranken von $f(a, b, c)$.

Hinweis: Zerlege die Funktion in einer Verkettung von Teilfunktionen und nutze zur Bestimmung der Fehlerschranken die Monotonie dieser Teilfunktionen.

Aufgabe H37 (Grenzwert einer Funktion) (3+3P)

Gegeben seien die Funktionen $f_1 = \frac{|x+1|+x+1}{|x^2-1|}$ und $f_2(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - x - 2$ mit $D(f_1) = R \setminus \{-1, 1\}$ und $D(f_2) = \mathbb{R}$. Untersuche, ob die folgenden Funktionsgrenzwerte (eigentliche oder uneigentliche) existieren und berechne diese im Falle der Existenz.

a) $\lim_{x\to x_0} f_1(x),\ x_0 \in \{-1, 1, -\infty, +\infty\}$.

b) $\lim_{x\to x_0} f_2(x),\ x_0 \in \{-2, -\infty, +\infty\}$.