Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 03.12.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

8. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G31 (Folgen)

Untersuchen Sie unterstehende Folgen auf Konvergenz oder Divergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls die jeweiligen Grenzwerte.

a)
$$a_k = \sqrt{k^2+k} - \sqrt{k^2-k},$$

b)
$$b_k = \frac{3k^3 - k^2 + 4k}{k^2 + 2 - k^3},$$

c)
$$c_k = (1 + \frac{1}{k})^{5k}.$$

Aufgabe G32 (Rekursiv definierte Folgen)

Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}a_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $1 \leq a_n \leq \sqrt{2}$.

b) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe G33 (Eigenschaften stetiger Funktionen)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Es existiert eine auf $[a, b]$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [a, b]$ und $B(f) = (-\infty, \infty)$.

b) Es existiert eine auf $[a, b]$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [a, b]$ und $B(f) = (c, d)$.

c) Es existiert eine auf $[a, b]$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [a, b]$ und $B(f) = [0, 1] \cup [3, 4]$.

Hausübungen

Aufgabe H32 (Folgen) (4+2+2P)

Untersuchen Sie unterstehende Folgen auf Konvergenz oder Divergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls die jeweiligen Grenzwerte.

a)

$$a_k = (1 - \frac{1}{k^2})^k,$$

Hinweis: Bestimmen Sie $\lim_{k\to\infty}(1 - \frac{1}{k})^k$, indem Sie die Funktion $(1 - \frac{1}{k})^k$ umformen und die Formel $\lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{k})^k = e$ verwenden.

b)

$$b_k = \frac{2^k + 3 \cdot 4^k}{3^k + 4^k},$$

c)

$$c_k = \sqrt{4k^2 + 5k + 2} - 2k.$$

Aufgabe H33 (Zwischenwertsatz) (5P)

Zeigen Sie, dass es für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\phi(x) = f(x) - x$.

Aufgabe H34 (Stetigkeit von Funktionen) (3+4P)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig sind. Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}$ bzw. auf $[-1, 1]$ fortsetzbar sind.

a)

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 + x^2 - x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\},$$

b)

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}}, \quad x \in [-1, 1] \setminus \{0\}.$$