Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 26.11.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

7. Übung

Gruppenübungen

(G 28)

Wir wollen die Funktionen $re^{\jmath(\omega t+\varphi)}$, $t \in [0,1]$, betrachten.

a) Skizzieren Sie die Kurven für

$$(r,\omega,\varphi) = (1,\omega,0) \text{ (rot) }, \ (2,\omega,\frac{2\pi}{8}) \text{ (blau)},$$

jeweils eine Skizze für $\omega = 2\pi$ und eine für $\omega = 4\pi$.
Markieren Sie auch jeweils in den zugehörenden Farben die Orte für $t = 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}$.

b) Tragen Sie für die beiden Diagramme aus a) die Realteile der Kurven in jeweils ein Diagramm ein.

(G 29) Überlagerung von Schwingungen

a) Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(t) = 2e^{\jmath 2\pi t}, \ g(t) = e^{\jmath(2\pi t+\frac{\pi}{2})}.$$

Skizzieren Sie deren Bahnkurven, sowie die Bahnkurve der Summenfunktion $f(t) + g(t)$. Tragen Sie außerdem die zu den Parameterwerten $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}$ gehörigen Funktionswerte (komplexen Zeiger) ein.

b) Zeichnen Sie nun die Bahnkurve zu der Funktion $f(t)$, die durch folgende komplexe Linearkombination von sin und cos gegeben ist:

$$f(t) = z_1 \cos(\pi t) + z_2 \sin(\pi t), \qquad \text{mit } z_1 = 1, z_2 = \frac{\jmath}{3}.$$

Tragen Sie die zu den Paramterwerten $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ gehörigen Punkte ein.
Was geschieht, wenn man z_2 durch $\frac{1}{3\jmath}$ ersetzt?

c) Skizzieren Sie nun die Bahnkurve der Funktion

$$f(t) = 2e^{\jmath\pi t} + e^{-\jmath(\pi t+\frac{\pi}{2})}.$$

Tragen Sie wieder die Punkte zu den Parameterwerten $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ ein.

(G 30) Inversion am Kreis

Betrachten Sie die gebrochenrationale Abbildung

$$f: \; z \mapsto \frac{1}{z},$$

die Inversion am Einheitskreis.

a) Zeigen Sie, dass die Inversion Kreislinien um den Ursprung in ebensolche Kreislinien überführt.

b) Gegeben ist die Gerade $g: \; z_1 + \lambda \cdot z_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit $z_1 = 3 + \frac{2}{7}\jmath$ und $z_2 = \jmath$. Zeichnen Sie das Bild dieser Gerade unter Inversion.

c) Auf einer Kreislinie K liegen die drei Punkte $-\jmath$, $\frac{\jmath}{3}$, $\frac{1}{6}(1+\jmath)$. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Kreislinie $f(K)$, auf die K abgebildet wird.
Hinweis: Der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

Hausübungen

(H 29) $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum (1+5+3+2 Punkte)

$\mathbb{C}$ kann mit der Basis $1, \jmath$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst werden - daher rührt die kartesische Darstellung $a + b\jmath$ der komplexen Zahlen. Wir wollen hier einige Isometrien (das sind Abbildungen, unter welchen Längen erhalten bleiben) und Streckungen des $\mathbb{R}^2$ ihren komplexen Entsprechungen gegenüberstellen.

a) Eine Verschiebung wird auch als *Translation* bezeichnet. Bestimmen Sie die Translation, bei welcher $\vec{0}$ in einen beliebigen Punkt P mit Ortsvektor $\vec{P} = \binom{P_1}{P_2}$. verschoben wird. Das Symbol "$\mapsto$" bedeutet "wird abgebildet auf".

b) Welche Abbildungen entsprechen der Streckung/Stauchung um einen Faktor a? Welche Abbildung entspricht der Drehung um den Ursprung um den Winkel φ? Überlegen Sie sich bei der Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in sich zuerst, wohin dabei die Basisvektoren der kanonischen Basis abgebildet werden und geben Sie dann die Matrix an.
Wie kann eine Drehstreckung – Streckung um a, Drehung um φ – beschrieben werden? Umgekehrt: was macht die Multiplikation mit $1 - \sqrt{3}\jmath$ geometrisch?
($*$) Was haben diese drei Typen komplexer Abbildungen gemeinsam und worin unterscheiden sie sich?

c) Welche Abbildungen entsprechen der Spiegelung an der reellen Achse in $\mathbb{C}$? Welche Abbildungen entsprechen in $\mathbb{R}^2$ der Spiegelung an der Ursprungsgeraden mit Richtungsvektor $\binom{\sqrt{3}}{-1}$?
Tip: Schalten Sie eine geeignete Drehung vor und nach die vorherige Spiegelung.

d) Welche dieser Abbildungen sind $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-linear?

Abbildung	**in $\mathbb{C}$**	**in $\mathbb{R}^2$**
Translation $\vec{0} \mapsto \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$	$f(z) =$	$f(\vec{x}) =$
Streckung um Faktor a	$f(z) =$	$f(\vec{x}) =$
Drehung um $\vec{0}$, $\angle\varphi$	$f(z) =$	$f(\vec{x}) =$
Drehstreckung: Faktor r, $\angle\varphi$	$f(z) =$	$f(\vec{x}) =$
Spiegelung an x-Achse	$f(z) =$	$f(\vec{x}) =$
Spiegelung an $g : \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$	$f(z) =$	$f(\vec{x}) =$

(H 30) (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie für die komplexe Zahl $z = r\big(\cos\phi + \jmath \sin\phi\big)$ die Polardarstellung von z^*.

b) Bestimmen Sie für die komplexe Zahl $z = r\big(\cos\phi + \jmath \sin\phi\big)$ die Polardarstellung von $\frac{1}{z}$.

c) Zeigen Sie folgende Formel für dreifache Winkel

$$\sin(3\alpha) = 3\cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

d) Weisen Sie nach, dass für zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 gilt

$$\mathtt{Re}(z_1 \cdot z_2^*) = \big\langle (\mathtt{Re} z_1, \mathtt{Im} z_1)^t \mid (\mathtt{Re} z_2, \mathtt{Im} z_2)^t \big\rangle\,,$$

wobei $\langle\ |\ \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf dem euklidischen $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

(H 31) 2x2 Inverse (1+2 Punkte)

Es seien

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, einmal mittels der Formel für die Inverse einer 2x2-Matrix im Skript und einmal, indem Sie $SS = E,\ T_\varphi T_{-\varphi} = E = T_{-\varphi} T_\varphi$ nachweisen, dass

$$S = S^{-1}, \quad T_\varphi^{-1} = T_{-\varphi}$$

gilt.