Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 19.11.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

6. Übung

Gruppenübungen

(G 24)

Wir betrachten die durch drei Punkte $P_1(-1,0,1)$, $P_2(0,2,0)$ und $P_3(-3,-1,0)$ definierte Ebene E und eine Gerade

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} .$$

a) Bestimmen Sie die Normalenform von E!

b) Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.

c) Berechnen Sie die (senkrechte) Projektion von $(-4,3,2)$ auf E.

(G 25) Komplexe Zahlen

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, sowie Betrag, Argument und Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen mit $z_1 = 2 + \jmath$, $z_2 = 4 - 3\jmath$.

a) $z_3 = z_1^* z_2$

b) $z_4 = \dfrac{z_1}{z_2^*}$

(G 26) Komplexe Zahlen

a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von $-7\jmath, (1-\jmath)^{100}$ und berechnen Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$z^4 = -7\jmath, \quad z^{100} = (1-\jmath)^{100}.$$

b) Berechnen Sie für $z_1 = 2 - 3\jmath$, $z_2 = -1 + 5\jmath$ und $z_3 = \cos\phi + \jmath \sin\phi$, $\phi \in \mathbb{R}$ beliebig, den Ausdruck

$$\frac{z_1}{z_2^*} z_3^3.$$

c) Skizzieren Sie den Bereich der komplexen Zahlenebene, der durch folgende Ungleichung beschrieben wird:

$$|z + 3 - \jmath| < 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(G 27)

a) Welche komplexe Zahl z erfüllt die Gleichung

$$\jmath(z-5) = 17 - 3\jmath \qquad ?$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 = a$$

für $a = -1 - \jmath$. Berechnen Sie - mit ausführlichem Rechenweg - die Polardarstellung von a.
Berechnen Sie a^{20} und geben Sie die Lösung auch in der Form $x + \jmath y$ mit $x,\ y \in \mathbb{R}$ an. Wie groß ist $|a^{20}|$?

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1

Hausübungen

(H 25) (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden Geraden

$$g_1 \quad : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$
$$g_2 \quad : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

a) Die Geraden schneiden sich. Berechnen Sie den Schnittpunkt!
Wie groß ist der Schnittwinkel der Geraden?

b) Geben Sie die Normalendarstellung der Ebene an, die durch $(0, 8, 15)$ und die beiden Richtungsvektoren von g_1 und g_2 gegeben ist!

(H 26) (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} (1+\jmath)z_1 + (1-\jmath)z_2 &= \quad 3+\jmath \\ (1-\jmath)z_1 + 3\jmath z_2 \qquad &= -3-2\jmath \end{aligned}$$

(H 27) (6 Punkte) Dreiecksungleichung im Komplexen

a) Zeigen Sie: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt $\texttt{Re}z \leq |z|$. Wann gilt Gleichheit?

b) Zeigen Sie die Dreicksungleichung für komplexe Zahlen:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

c) Beweisen Sie: $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Hinweis: Quadrieren Sie in a) und b) jeweils beide Seiten der Ungleichung. (Warum genügt es, die quadrierten Ungleichungen zu betrachten?)

(H 28) (5 Punkte) Komplexe Zahlen

a) Bestimmen Sie die Lösung $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung

$$(3+\jmath)z - \frac{1}{\jmath} = 2 + 3\jmath.$$

b) Berechnen Sie $z = (1+\jmath)^{20}$.

c) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1$.