Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 12.11.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

5. Übung

Gruppenübungen

(G 20) Quantoren

Überlegen Sie sich, welche der folgenden Aussagen stimmen und was die Unterschiede zwischen den Paaren i) und ii) sind.

a) i) Für alle Autos gibt es einen Motor.
   ii) Es gibt einen Motor für alle Autos.

b) i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \leq n$ gilt.
   ii) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x \leq n$ gilt.

(G 21) Beträge und Ungleichungen

Skizzieren Sie die folgenden Mengen auf der Zahlengeraden.

a) $M = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| \leq 5\}$
b) $M = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 1| > 3\}$
c) $M = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| \leq 5 \text{ und } |2x + 1| > 3\}$
d) $M = \{x \in \mathbb{R} : \Big||x| - 3\Big| \leq 2\}$
e) $M = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| \leq 5 \text{ oder } \Big||x| - 3\Big| \leq 2\}$

(G 22) Archimedisches Axiom

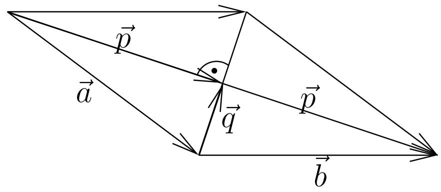
In dieser Aufgabe sollen Folgerungen aus den Archimedischen Prinzipien betrachtet werden.

a) Beweisen Sie: Sei $b \in \mathbb{R}$ und $b > 1$. Dann gibt es zu jedem $r \in \mathbb{R}$, mit $r > 0$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $b^n > r$.
Hinweis: Benutzen Sie die Bernoullische Ungleichung $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ *für jedes reelle* $x > 1$ *und jedes* $n \in \mathbb{N}$, *vgl. Aufgabe (H 16).*

b) Zeigen Sie: Sei b eine reelle Zahl mit $0 < b < 1$. Dann gibt es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$.

(G 23)

Zeigen Sie, dass ein Parallelogramm, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, ein Rhombus (eine Raute) ist, d.h. alle Seiten sind gleich lang.

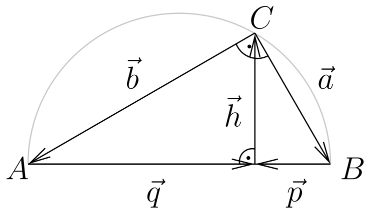


Hinweis: In Aufgabe (H 8) wurde gezeigt, dass sich die Diagonalen halbieren.

Hausübungen

(H 20) (5 Punkte) Höhensatz

Betrachten Sie folgendes rechtwinkliges Dreieck:



Beweisen Sie den sogenannten Höhensatz:

$$h^2 = p \cdot q,$$

hierbei bezeichnen h, p, q jeweils die Längen der Höhe und der beiden Höhenabschnitte im rechtwinkligen Dreieck A, B, C. Verwenden Sie dazu das Skalarprodukt!

(H 21) (3 Punkte) Beträge und Ungleichungen

Bestimmen Sie für die Mengen $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ die Lösungsmenge von

a) $7x + 8 = 3x$,

b) $|3x + 2| = 5$,

c) $|x + 3| + |x - 3| < 10$.

(H 22) (5 Punkte) Babylonisches Wurzelziehen

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + \frac{x}{b_n}),$$

mit $b_1 = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

a) Zeigen Sie, dass $b_n > 0$ und $b_n^2 \geq x$ für alle $n \geq 1$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Folge monoton fallend ist, d.h. $b_{n+1} \leq b_n$ gilt für alle $n \geq 1$.

c) Betrachten Sie nun die Folge

$$a_n = \frac{x}{b_n}, \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots .$$

Weisen Sie nach, dass die Folge monoton steigt, d.h. $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n, und dass immer $a_n^2 \leq x$ gilt.

d) Zeigen Sie nun, dass

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}\,(b_n - a_n)\,.$$

Anleitung: Drücken Sie alles durch b_n aus, schätzen Sie b_{n+1} durch b_n ab.

e) Zeigen Sie, dass durch die beiden Folgen $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ und $(b_n \mid n \in \mathbb{N})$ eine Intervallschachtelung gegeben wird, welche die reelle Zahl $\sqrt{x}$ approximiert.

(H 23) (3 Punkte)

Sei V ein euklidischer Raum, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ das Skalarprodukt, und $\|v\| := \sqrt{\langle v \mid v \rangle}$. Zeigen Sie, dass für a, $b \in V$ gilt:

$$a - b \ \perp \ a + b \quad \Longleftrightarrow \quad \|a\| = \|b\|.$$

(H 24) (4 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf V. Die Norm sei durch $\|v\| = \sqrt{\langle v \mid v \rangle}$ erklärt.

Zeigen Sie, dass für jedes Paar von Vektoren $x{,}y \in V$ folgende Aussagen gelten:

a) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta$, wobei θ den Winkel zwischen x und y bezeichnet. (Verallgemeinerter Pythogoras)

b) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (Parallelogramm Gleichung).