Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 29.10.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

3. Übung

Gruppenübungen

(G 10)

Betrachten Sie das homogene lineare Gleichungssystem aus Aufgabe (G9).

a) Welchen Rang hat das Gleichungssystem? Geben Sie ein Fundamentalsystem des Lösungsraums an.

b) Überprüfen Sie, ob der Lösungsraum ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^5$ ist!

(G 11)

Sie haben das folgende, von einem Renditeparameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige LGS:

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ y + az &= 1 \\ x + ay + 2z &= 1. \end{aligned}$$

a) Bringen Sie das System durch Zeilenumformungen in Stufenform.

b) Schreiben Sie die Zeilenumformungen aus a) in *Matrizenschreibweise*: hierbei steht in T_{ij} der Koeffizient der alten Zeile Z_j für die neue Zeile Z'_i, wobei T eine $m \times m$-Matrix ist (bei m Zeilen im LGS). Es ist also $Z'_i = T_{i1}Z_1 + \cdots + T_{im}Z_m$. Ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \overset{T}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \overset{T'}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{41}{13} \end{pmatrix}$$

kann beschrieben werden durch $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{13} & 1 \end{pmatrix}.$

c) Bestimmen Sie den Lösungsraum L des LGS in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ und klassifizieren Sie, um welches geometrische Objekt es sich in den einzelnen Fällen bei L handelt.

(G 12)

Gegeben sind zwei Ebenen im Raum in impliziter Form: Bestimmen Sie jeweils eine Darstellung dieser Ebenen in Parameterform!

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad E_1: \quad x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0. \\ &\text{b)} \quad E_2: \quad 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 5. \end{aligned}$$

(G 13)

a) Betrachten Sie folgende Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie rechnerisch, ob $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ linear unabhängig sind:

b) Gegen sind fünf Vektoren im $\mathbb{R}^5$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 7 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 26 \\ 7 \\ -16 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 27 \\ 4 \\ -54 \\ 80 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie diese rechnerisch auf lineare Unabhängigkeit.

c) Prüfen Sie nach, ob die folgenden sieben Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_7 \in \mathbb{R}^6$ linear unabhängig sind

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \big(\ \ 0,\ \ 3, -1,\ \ 2, -3,\ \ 3\big),\ \mathbf{v}_2 = \big(-2, -3,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 2\big),\\
\mathbf{v}_3 &= \big(\ \ 0,\ \ 3, -3,\ \ 3,\ \ 0,\ \ 1\big),\ \mathbf{v}_4 = \big(\ \ 1,\ \ 3,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 0, -2\big),\\
\mathbf{v}_5 &= \big(\ \ 1,\ \ 2, -3, -1,\ \ 3, -2\big),\ \mathbf{v}_6 = \big(-1, -3,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 3\big),\\
\mathbf{v}_7 &= \big(-1, -2,\ \ 0, -2,\ \ 1, -3\big).
\end{aligned}$$

(Die Vektoren wurden hier zu besseren Übersichtlichkeit ausnahmsweise als Zeilen geschrieben.)

(G 14)

Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Schreiben Sie dabei Zeilenumformungen in Matrizenform, wie in (G 11) eingeführt.

(G 15)

Bestimmen Sie den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie dabei Zeilenumformungen in Matrizenform, wie in (G 11) eingeführt!

Hausübungen

Bemerkung: Weil das Lösen von linearen Gleichungssystemen oft und bei sehr vielen Problemen benötigt wird sind die Aufgaben dazu umfangreicher als sonst. Sie erhalten dafür aber auch mehr Hausaufgabenpunkte. Alle Aufgaben in dieser Übung sind - soweit dies nicht notwendig ist - ***ohne* Zeilentausch** durchzuführen. Falls ein Zeilentausch notwendig ist, tauschen Sie mit der obersten Zeile, in welcher in bearbeiteter Spalte keine Null steht. Um die Korrektur im zeitlich Machbaren zu halten werden wir Punkte abziehen, wenn Sie dies nicht beachten.

(H 9) (5 Punkte)

Gegeben seien die beiden Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &: x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ E_2 &: 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{aligned}$$

Diese Ebenen schneiden sich. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden $g = E_1 \cap E_2$ an!

(H 10) (8 Punkte)

Gegeben ist folgendes homogenes LGS

$$\begin{pmatrix} -11 & -9 & -13 & -15 & -13 & -14 \\ 22 & 16 & 21 & 19 & 27 & 17 \\ 18 & 14 & 20 & 22 & 20 & 20 \\ -7 & -9 & -11 & -6 & -10 & -9 \\ 0 & -2 & -5 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Bringen Sie dieses LGS mit dem Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform! Verwenden Sie dabei die Matrizenschreibweise aus (G 11), um Umformungen anzugeben. Welchen Rang hat das LGS?

(H 11) (3 Punkte)

Großvater, Mutter und Tochter beschreiben ihr Alter wie folgt: der Großvater ist bereits heute um das zweifache Alter der Mutter vor einem Jahr älter als seine Enkelin, in 25 Jahren wird diese aber zusammen mit ihrer Mutter genauso alt sein, wie er sein wird. Im Moment ist der Großvater um das Vierfache des Alters der Tochter in einem Jahr älter als die Mutter.
Wie alt sind Großvater, Mutter und Tochter?

(H 12) (6 Punkte)

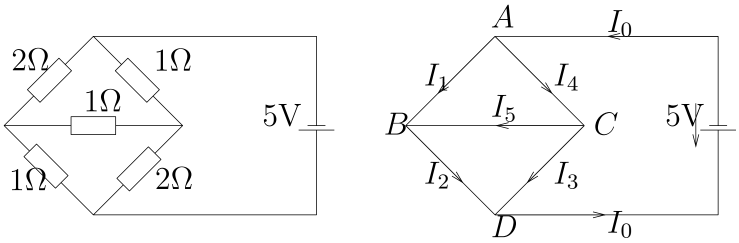
Bestimmen Sie alle Lösungen des parameterabhängigen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & a-1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie dabei auftretende Zeilenumformungen in Matrizenform, wie in (G 11) eingeführt.

(H 13) (9 Punkte)

Gegeben sei folgende Brückenschaltung, bestehend aus fünf Widerständen und einer 5V Spannungsquelle.



Berechnen Sie die Stromstärken $I_0, \ldots, I_5$ und den Gesamtwiderstand der Brücke! Verwenden Sie beim Lösen des linearen Gleichungssystems mit Gauß die Matrizenschreibe aus (G 11), um Zeilenumformungen auszudrücken!
Hinweise: Man beachte das Ohmsche Gesetz $U = RI$, sowie die Kirchhoffschen Regeln:

- An jedem Knoten ist die Summe der Ströme gleich Null.
- An jeder Masche ist die Summe der Spannungen gleich Null.

(H 14) (4 Punkte)

Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems an

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie dabei Zeilenumformungen in Matrizenform, wie in (G 11) eingeführt!

(H 15) (5 Punkte)

Gegeben seien drei Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Matrix $(\mathbf{v_1 v_2 v_3})$, d.h. die Matrix mit diesen Vektoren als Spalten. Wie hängt die Rangveränderung von $(\mathbf{v_1 v_2 v_3})$ gegenüber $(\mathbf{v_1 v_2})$, also der Matrix mit $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ als Spalten, mit der Lösbarkeit des inhomogenen LGS

$$(\mathbf{v_1 v_2})\mathbf{x} = \mathbf{v_3}$$

zusammen?