Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 28.01.2009

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

12. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G43 (Regeln von de l'Hospital)

Bestimme folgende Grenzwerte mit der Regel von de l'Hospital.

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-8x}{x^2-x-2}$

c) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

Aufgabe G44 (Substitution)

Berechne

a) $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$,

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \cos^3 x)dx$

mittels Substitution.

Aufgabe G45 (Integrierbarkeit)

a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ gegeben und f ist integrierbar auf jedem $[\alpha, b]$, $\alpha > a$. Zeige, dass f auch auf $[a,b]$ integrierbar ist.

Hinweis: Konstruiere eine monoton fallende Folge h_n und eine monoton wachsende Folge g_n von Treppenfunktionen mit $h_n, g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g_n \leq f \leq h_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $h_n = M$ und $g_n = m$ auf $[a, c_n)$ mit $c_n = a + \frac{1}{2n(M-m)}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt. Versuche auf $[c_n, b]$ diese Funktionen so zu wählen, dass es $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = I$ für ein $I \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Ist die Funktion $\sin \frac{1}{x}$ auf $[0,b]$ integrierbar?

Hausübungen

Aufgabe H45 (Regeln von de l'Hospital) (1+1+1P)

Berechne folgende Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2-4x-4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

Aufgabe H46 (Gleichmässige Stetigkeit) (8P)

Entscheide, ob die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \to \frac{1}{1+x^2}$$

gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe H47 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) (4+5P)

a) Der Mittelwert der auf $[a,b]$ integrierbaren Funktion $f(x)$ ist $M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Bestimme den Mittelwert M für die Funktionen: $f_1(x) = \sin x$ auf $[a,b] = [0,\pi]$, $f_2(x) = x^2$ auf $[a,b] = [0,1]$ und $f_3(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ auf $[a,b] = [-1,1]$. Kann man für jede von diesen Funktionen ein $\xi \in (a,b)$ finden, so dass $f(\xi) = M$ ist?

b) Sei durch $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f \not\equiv 0$ gegeben. Zeige, dass es ein $[c,d] \subset [a,b]$ existiert, so dass $\int_c^d f(x)dx \neq 0$ gilt.