Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
Eric Hofmann
René Hartmann
Nataliya Kraynyukova

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008/2009 15.10.2008

Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iSt, BEd.ET, CE

1. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Arithmetik

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$(i)\quad 2\frac{1}{4}+\frac{15}{3} \qquad (ii)\quad \frac{2}{7}+\frac{4}{13}$$

$$(iii)\quad \frac{2}{X-1}-\frac{X}{X^2-1} \qquad (iv)\quad X+\frac{1}{X}\left(1-2X^2\right)$$

(G 2) Summen und Produkte

a) Bestimmen Sie die Werte folgender Summen und Produkte:

$$(i)\ \sum_{i=0}^{5}(i+1) \qquad (ii)\quad \sum_{m=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(km-2k)$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{300}\sum_{l=k}^{300}\sin\left(k^2+l\right)=\sum_{l=1}^{300}\sum_{k=1}^{l}\sin\left(k^2+l\right).$$

(G 3) Rekursive Definitionen

a) Die *Fakultät* einer natürlichen Zahl n, geschrieben $n!$, wird folgendermaßen definiert:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{für } n=0 \\ (n-1)!n & \text{für } n>0 \end{cases}.$$

Berechnen sie $n!$ für die natürlichen Zahlen $n=1,\ldots,6$.

b) Die Folge der *Fibbonaci-Zahlen* wird folgendermaßen definiert: Man setzt $F_0=0$ und $F_1=1$. Die $n$te Fibbonacci Zahl ist dann für $n>1$ definiert als $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$.

- Berechnen Sie F_5.
- Überlegen Sie sich, ob man diese Definition auch auf beliebige ganze Zahlen $n\in\mathbb{Z}$ erweitern kann. Was wäre demnach F_{-2}?

(G 4)

Für $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ seien die Zahlen $C(n,k)$ rekursiv definiert durch

$$C(n,k) := \begin{cases} 1 & \text{für } (n,k) = (0,0), \\ 0 & \text{falls } k < 0 \text{ oder } n < k, \\ C(n-1,k-1) + C(n-1,k) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Berechnen Sie mit der Rekursionsformel die Einträge in Abbildung 1.

(G 5)

Sei die Aussage $\mathcal{A}(n), n \in \mathbb{N}$, gegeben durch

$$\mathcal{A}(n): \quad \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

a) Überprüfen Sie, ob $\mathcal{A}(n)$ für $n = 0$ wahr ist (*Induktionsstart*).

b) Zeigen Sie mit $\mathcal{A}(n)$ dass $\mathcal{A}(n+1)$ wahr ist. n soll hierbei fest aber beliebig sein (*Induktionsschritt*).

(G 6)

In dieser Aufgabe soll der binomische Satz durch Induktion bewiesen werden. Aussage $\mathcal{A}(n), n \in \mathbb{N}$, sei

$$\mathcal{A}(n): \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^k y^{n-k}. \tag{2}$$

a) Überprüfen Sie, ob $\mathcal{A}(n)$ für $n = 0$ wahr ist (*Induktionsstart*).

b) Zeigen Sie mit Rekursion (1) und indem Sie $\mathcal{A}(n)$ verwenden, dass $\mathcal{A}(n+1)$ wahr ist. n soll hierbei fest aber beliebig sein (*Induktionsschritt*).

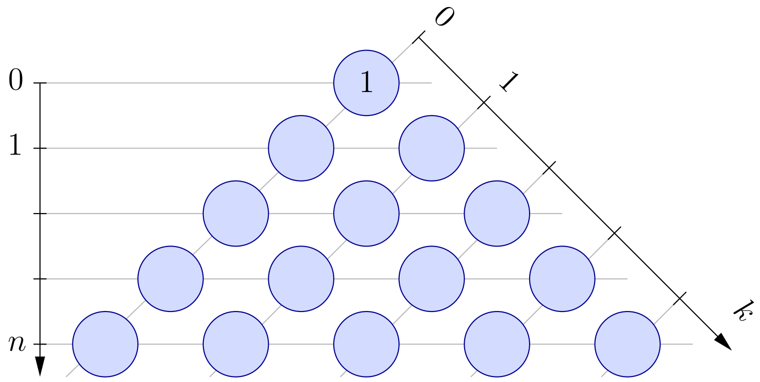

Abbildung 1: Rekursiv definierte $C(n,k)$. $C(n,k)$ steht in Zeile $n+1$, Spalte $k+1$, wobei $n = 0, 1, 2, \ldots$ und nur $k = 0, \ldots, n$ aufgeführt sind.

Hausübungen

(H 1) (4 P)

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$(i) \quad \frac{-3}{7} + \frac{4}{5} \qquad (ii) \quad \frac{1}{121} + \frac{-10}{11}$$

$$(iii) \quad \frac{4}{X+1} + \frac{2}{X+2} \qquad (iv) \quad 3 - X + \frac{(X^2-3X+2)(X-3)}{(X-1)(X-2)}$$

(H 2) (2 + 2 P)

a) Schreiben Sie in $\sum$- bzw. $\prod$-Notation:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 45 + 47 = \qquad , \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{432} =$$

b) Berechnen Sie folgende Terme

$$(i) \sum_{m=1}^{2} \prod_{k=m}^{3} (k^2 - 1) \qquad (ii) \qquad \prod_{k=1}^{4} \sum_{i=3}^{k} (k-i)^2.$$

(H 3) Vollständige Induktion (3+3 P)

a) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Zahl $2^{2n} - 1$ durch 3 teilbar ist.

b) Beweisen Sie, dass für jedes natürliche $n \geq 1$ die folgende Aussage gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}.$$

(H 4) Multiplikation einmal anders (6 P)

Bereit im alten Ägypten kannte man folgendes Verfahren, zwei natürliche Zahlen a und b miteinander zu multiplizieren:

1. Man schreibt a und b nebeneinander in die erste Zeile.
2. Auf die linke Seite, unter a schreibt man nun in jeder Zeile nacheinander das Ergebnis der ganzzahligen Division der darüberstehenden Zahl durch 2. Beispielsweise schreibt man in die zweite Zeile links $a/2$ falls a gerade war und sonst $(a-1)/2$. Man hört auf, nachdem man die 1 als Ergebnis aufgeschrieben hat.
3. Auf der rechten Seite, unter b, schreibt man nacheinander in jede Zeile, in der links schon eine Zahl steht, das doppelte der darüberstehenden Zahl, also $2b$, $4b$ und so weiter.
4. Nun streicht man auf der rechten Seite alle Zahlen aus, neben denen eine gerade Zahl steht (auch b, falls a gerade ist). Die verbliebenen Zahlen auf der rechten Seite addiert man. Ihre Summe liefert ist das Ergebnis, $P(a, b)$.

Beweisen Sie durch *Ordnungsinduktion* nach a, dass für jede natürliche Zahl $b > 0$ tatsächlich $P(a, b) = ab$ gilt.
Anleitung: Zeigen Sie im Induktionsschritt, dass aus Gültigkeit der Aussage

$$\mathcal{A}(\tilde{a}) : \quad \text{„Für jedes } b \in \mathbb{N},\ b \neq 0, \text{ gilt } P(\tilde{a}b) = ab.\text{“}$$

für jede natürliche Zahl $\tilde{a} < a$ die Gültigkeit der Aussage $\mathcal{A}(a)$ folgt.
Hinweis: Es kann hilfreich sein, den Beweis für gerades und ungerades a getrennt durchzuführen.